Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2009

Problemas y Soluciones

Henry Martínez
José Heber Nieto Said
Rafael Sánchez Lamoneda
Eduardo Sarabia
Laura Vielma

Índice general

Introducción **1**

1. Prueba Preliminar: Canguro Matemático **3**
1.1. Prueba de 7º grado . . . 3
1.1.1. Soluciones . . . 9
1.2. Prueba de 8º y 9º grados . . . 14
1.2.1. Soluciones . . . 20
1.3. Prueba de 1º y 2º de diversificado . . . 25
1.3.1. Soluciones . . . 31

2. Prueba Regional **35**
2.1. Prueba de 7º y 8º grados . . . 35
2.1.1. Soluciones . . . 36
2.2. Prueba de 9º grado . . . 38
2.2.1. Soluciones . . . 39
2.3. Prueba de 1º y 2º de diversificado . . . 41
2.3.1. Soluciones . . . 42

3. Prueba Final **45**
3.1. Prueba de 7º y 8º grados . . . 45
3.1.1. Soluciones . . . 47
3.2. Prueba de 9º grado . . . 49
3.2.1. Soluciones . . . 50
3.3. Prueba de 1º y 2º de diversificado . . . 52
3.3.1. Soluciones . . . 53

Introducción

Las Olimpiadas Matemáticas son competencias dirigidas principalmente a jóvenes de educación elemental y secundaria, y su finalidad es la promoción de las matemáticas en la comunidad educativa, y la detección de talento para el estudio de esta ciencia desde muy temprana edad. Tienen sus orígenes a finales del siglo XIX en Europa y actualmente hay competencias de este estilo en la mayoría de los países del mundo.
Las Olimpiadas Matemáticas se realizaron en Venezuela por primera vez en el año escolar de 1975-76 como un programa para la promoción de las matemáticas entre los jóvenes de la escuela secundaria. El Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC) acogió el proyecto propuesto por el profesor Saulo Rada, del Instituto Pedagógico de Caracas, y con el apoyo de esta institución, del Ministerio de Educación y del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT), se organizó la primera *Olimpiada Matemática Venezolana* (OMV). De esta manera comienza en Venezuela el programa de Olimpiadas Matemáticas, logrando a lo largo de 27 años una participación de más de un millón de jóvenes a todo lo ancho y largo del país. Este programa finalizó en el año 2003.
En el año 2000, con el objetivo de promover las competencias de matemáticas en Venezuela y de llevar adelante un amplio programa de selección y entrenamiento de estudiantes para participar en olimpiadas matemáticas internacionales, se fundó la *Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas* (ACM). La ACM es una asociación civil sin fines de lucro que cuenta con el aval de la *Asociación Matemática Venezolana* (AMV), de la *Academia Venezolana de Ciencias Físicas, Matemáticas y Naturales* y de las principales universidades del país. El lector puede consultar más sobre la ACM visitando la página web `www.acm.org.ve`.
La ACM, consciente de la importancia de un concurso nacional de matemáticas, se afilió a la organización *Canguro sin Fronteras*, obteniendo así el derecho de organizar en Venezuela el *Canguro Matemático*, la competencia juvenil de matemáticas de mayor difusión en el mundo entero, y a partir del año 2004 organiza la *Olimpiada Juvenil de Matemáticas* (OJM), competencia en la cual participan los estudiantes de la tercera etapa de Educación Básica y de Educación Media y Diversificada. La OJM se organiza en casi todo el país.
El presente libro reúne todos los problemas propuestos en la OJM 2009. Esta

competencia consta de tres etapas o pruebas. La primera de ellas es el *Canguro Matemático*, un examen de treinta problemas de selección simple, que fue presentado por 59.891 estudiantes provenientes de 22 estados del país. A continuación se realiza la *Prueba Final Regional*. La misma consta de un examen de cinco problemas de desarrollo y compiten los alumnos que quedaron ubicados en el diez por ciento superior en el Canguro Matemático. Esta prueba se organiza en cada estado que participa en la OJM y los ganadores reciben medallas de oro, plata y bronce. La tercera etapa es la *Prueba Final Nacional*, en la cual participan los alumnos ganadores de medalla de oro en la Prueba Final Regional. Tanto en la primera como en la segunda etapa, los alumnos participantes presentan sus exámenes en la ciudad donde viven. Para la Final Nacional se elige cada año una sede y allí se organiza el evento, permitiendo a los participantes, sus profesores y representantes estrechar lazos de amistad y compartir una experiencia educativa enriquecedora. La Prueba Final Nacional 2009 se realizó en la *Universidad de Margarita*, en el estado Nueva Esparta y participaron 110 alumnos representando a 16 estados.

Este libro consta de tres capítulos, uno por cada prueba. En ellos se presentan los problemas y sus soluciones. Esperamos que sea de gran utilidad tanto para profesores como para estudiantes, y que les permita conocer las matemáticas desde un punto de vista interesante y entretenido.

Aprovechamos la oportunidad para agradecer a nuestros patrocinadores, en especial a la *Fundación Empresas Polar*, a *Acumuladores Duncan*, a *MRW* y a la *Fundación Cultural del Colegio Emil Friedman*, así como a todos los colegas que con su trabajo y esfuerzo, permiten que la Olimpiada Juvenil de Matemáticas sea una realidad.

Capítulo 1

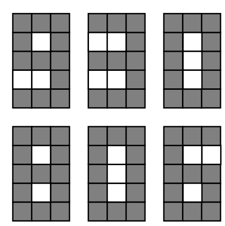
Prueba Preliminar: Canguro Matemático

1.1. Prueba de 7º grado

1. ¿Cuál de los siguientes números es par?

Ⓐ 2009 Ⓑ $2+0+0+9$ Ⓒ $200-9$
Ⓓ 200×9 Ⓔ $200+9$

2. La figura superior muestra el número 930 en una pantalla formada por cuadraditos blancos y negros. ¿Cuántos de esos cuadraditos deben cambiar de color para formar el número 806 de la figura inferior?



Ⓐ 5 Ⓑ 6 Ⓒ 7 Ⓓ 8 Ⓔ 9

3. Uno de los lados de un rectángulo mide 8 cm de longitud, mientras que el otro lado mide la mitad. ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuyo perímetro es igual al perímetro del rectángulo?

Ⓐ 6 cm Ⓑ 4 cm Ⓒ 12 cm Ⓓ 8 cm Ⓔ 24 cm

4. Sofía lanzó un dado cuatro veces y obtuvo un total de 23 puntos. ¿En cuántos lanzamientos obtuvo 6 puntos?

Ⓐ 1 Ⓑ 0 Ⓒ 3 Ⓓ 2 Ⓔ 4

5. La menor cantidad de dígitos que hay que borrar en el número 12323314 para obtener un número capicúa (es decir, que se lea igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) es

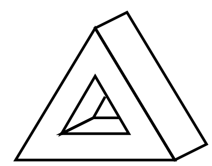
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

6. Se tienen tres cajas: una blanca, otra roja y otra verde. Una de ellas contiene solamente una barra de chocolate, otra contiene solamente una manzana y otra está vacía. Se sabe que el chocolate está en la caja blanca o en la roja, y que la manzana no está ni en la blanca ni en la verde. Entonces la caja que contiene el chocolate es:

(A) blanca (B) roja (C) verde
(D) roja o verde (E) imposible determinarlo

7. ¿Cuántas caras tiene este sólido (prisma con un hueco)?

(A) 7 (B) 6 (C) 10 (D) 8 (E) 12

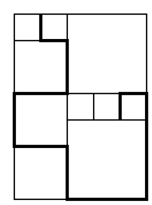


8. Un puente atraviesa un río. El río tiene 120 metros de ancho. Un cuarto del puente está sobre la rivera izquierda del río y otro cuarto está sobre la rivera derecha. ¿Qué longitud tiene el puente?

(A) 150 m (B) 180 m (C) 210 m (D) 240 m (E) 270 m

9. En la figura hay cuadrados de tres tamaños diferentes. El lado de loa cuadrados más pequeños mide 20 cm. ¿Qué longitud tiene la línea quebrada gruesa?

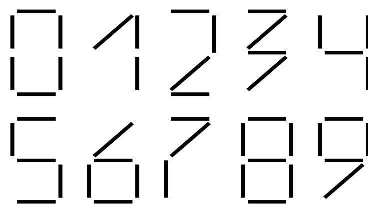
(A) 380 cm (B) 400 cm (C) 420 cm (D) 440 cm (E) 1680 cm



10. En una habitación hay perros y gatos. El número de las patas de los gatos es el doble del número de las narices de los perros. Entonces el número de gatos es:

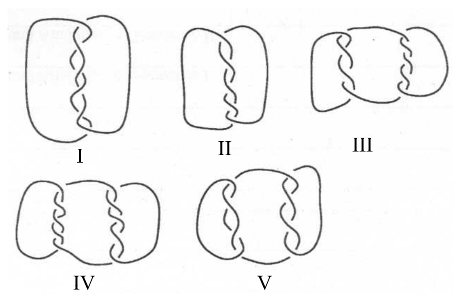
(A) el doble del número de perros (B) la mitad del número de perros
(C) igual al número de perros (D) $\frac{1}{4}$ del número de perros
(E) $\frac{1}{6}$ del número de perros

11. Se usan palillos idénticos para formar los dígitos, como se muestra en la figura. El *peso* de un número se define como el número de palillos necesarios para formarlo. ¿Cuánto pesa el número más pesado de dos dígitos?



Ⓐ 10 Ⓑ 11 Ⓒ 12 Ⓓ 13 Ⓔ 14

12. ¿Cuáles de los siguientes lazos consisten de más de un pedazo de cuerda?



Ⓐ I, III, IV y V

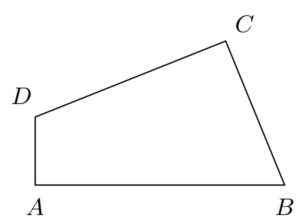
Ⓑ I, III y V

Ⓒ III, IV y V

Ⓓ todos

Ⓔ ninguno

13. El cuadrilátero $ABCD$ tiene lados $AB = 11$, $BC = 7$, $CD = 9$ y $DA = 3$ y tiene ángulos rectos en A y C. ¿Cuál es el área de este cuadrilátero?

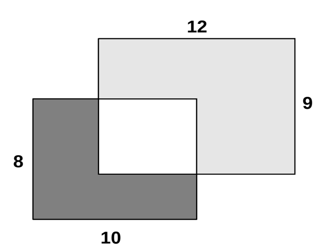


Ⓐ 30 Ⓑ 44 Ⓒ 48 Ⓓ 52 Ⓔ 60

14. En un grupo de baile hay 39 muchachos y 23 muchachas. Cada semana, 6 nuevos muchachos y 8 nuevas muchachas se unen al grupo. Después de algunas semanas el número de muchachos y el de muchachas se igualarán. ¿Cuántos integrantes tendrá el grupo en ese momento?

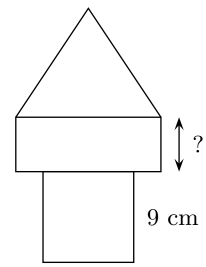
Ⓐ 144 Ⓑ 154 Ⓒ 164 Ⓓ 174 Ⓔ 184

15. Dos rectángulos de 8×10 y 9×12 se solapan como muestra la figura. El área de la parte gris oscura es 37. ¿Cuál es el área de la parte gris clara?



Ⓐ 60 Ⓑ 62 Ⓒ 62,5 Ⓓ 64 Ⓔ 65

16. La “torre” de la figura está formada con tres estructuras: un cuadrado, un rectángulo y un triángulo equilátero. El perímetro de las tres estructuras es el mismo. El lado del cuadrado mide 9 cm. ¿Cuánto mide el lado del rectángulo señalado en la figura?



Ⓐ 6 cm Ⓑ 4 cm Ⓒ 7 cm Ⓓ 5 cm Ⓔ 8 cm

17. Hoy es domingo y Francisco comienza a leer un libro de 290 páginas. Él lee 4 páginas cada día, excepto los domingos, cuando lee 25 páginas. ¿Cuántos días consecutivos le tomará leer el libro completo?

Ⓐ 5 Ⓑ 46 Ⓒ 40 Ⓓ 35 Ⓔ 41

18. Andrés, Bruno, Carlos y Daniel ganaron las primeras cuatro posiciones del torneo de esgrima. Si se suman los números de posición de Andrés, Bruno y Daniel se obtiene el número 6. El mismo número se obtiene si se suman los números de posición de Bruno y Carlos. Si Bruno quedó mejor ubicado que Andrés, ¿quién quedó en primer lugar?

Ⓐ Bruno Ⓑ Andrés Ⓒ Daniel
Ⓓ Carlos Ⓔ es imposible determinarlo

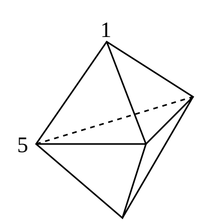
19. Orlando toma 2009 piezas cuadradas del mismo tamaño y las coloca de modo de llenar un rectángulo, ¿Cuántos rectángulos diferentes puede obtener?

Ⓐ 10 Ⓑ 2 Ⓒ 1 Ⓓ 3 Ⓔ 5

20. Considere las cuatro afirmaciones siguientes acerca del entero positivo n: “n es divisible entre 5”, “n es divisible entre 11”, “n es divisible entre 55”, “n es menor que 10”. Si dos de las afirmaciones anteriores son verdaderas y las otras dos son falsas, entonces n es:

Ⓐ 55 Ⓑ 11 Ⓒ 0 Ⓓ 10 Ⓔ 5

21. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara se considera la suma de los 3 números en los vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números?

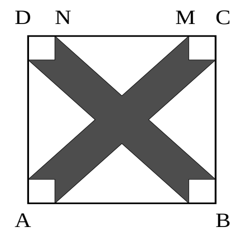


Ⓐ 9 Ⓑ 12 Ⓒ 17 Ⓓ 18 Ⓔ 24

22. Las habitaciones de un hotel están numeradas con tres dígitos. El primero indica el piso y los dos siguientes el número de habitación en el piso. Por ejemplo, 125 indica la habitación número 25 del primer piso. Si el hotel tiene en total 5 pisos numerados del 1 al 5, con 35 habitaciones por piso (numeradas del 101 al 135 en el primer piso, etc.) ¿cuántas veces se debe usar el dígito 2 para numerar todas las habitaciones?

Ⓐ 60 Ⓑ 65 Ⓒ 95 Ⓓ 100 Ⓔ 105

23. ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. La distancia del punto N al punto M es 6 cm. Cada región no sombreada representa triángulos isósceles iguales o cuadrados iguales. Halle el área de la región sombreada dentro del cuadrado ABCD.



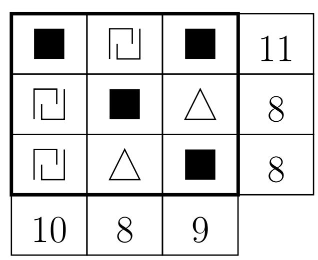
Ⓐ 42cm^2 Ⓑ 48cm^2 Ⓒ 50cm^2 Ⓓ 52cm^2 Ⓔ 58cm^2

24. Se desea llenar una caja de 30 cm $\times$ 30 cm $\times$ 50 cm con cubos sólidos, todos del mismo tamaño. ¿Cuál es el mínimo número de cubos necesarios para lograrlo?

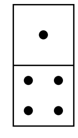
Ⓐ 45 Ⓑ 15 Ⓒ 75 Ⓓ 30 Ⓔ 150

25. Dados los totales de cada fila y columna, ¿cuál es el valor de ■ + ⊡ − △?

Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 6 Ⓓ 7 Ⓔ 8



26. Un juego completo de 28 fichas de dominó contiene todas las combinaciones posibles de dos números de puntos entre 0 y 6 (ambos incluidos), incluyendo los pares de números iguales. ¿Cuántos puntos hay en total en un juego de dominó?



Ⓐ 84 Ⓑ 105 Ⓒ 126 Ⓓ 147 Ⓔ 168

27. En un tablero de 4×2, se escriben dos números en la primera fila. Cada fila siguiente contiene la suma y la diferencia de los números escritos en la fila previa (vea la figura como ejemplo). En un tablero de 7×2, llenado de la misma manera, los números que quedaron en la última fila fueron 96 y 64. ¿Cuál es la suma de los números en la primera fila?

10	3
13	7
20	6
26	14

Ⓐ 24 Ⓑ 20 Ⓒ 12 Ⓓ 10 Ⓔ 8

28. En el país Piesraros, todos tienen el pie izquierdo una o dos tallas más grande que el pie derecho. Sin embargo, los zapatos se venden en pares del mismo tamaño. Para ahorrar, un grupo de amigos deciden comprar un lote de zapatos: cada uno toma dos zapatos que le queden, y sobran un zapato talla 36 y otro talla 45. El mínimo número de personas en el grupo es

Ⓐ 5 Ⓑ 6 Ⓒ 7 Ⓓ 8 Ⓔ 9

29. Se desea colorear las casillas del tablero de la figura usando los colores A, B, C y D, de manera tal que casillas vecinas tengan colores diferentes (dos casillas se consideran vecinas si tienen al menos un vértice común). Algunas casillas ya han sido coloreadas como muestra la figura. ¿Qué posibilidades hay para la casilla sombreada?

A	B		C	D

Ⓐ A Ⓑ B Ⓒ C
Ⓓ D Ⓔ hay dos posibilidades diferentes

30. Ocho tarjetas numeradas del 1 al 8 se colocan en las cajas A y B, de tal manera que las sumas de los números de las tarjetas en cada caja sean iguales. Si en la caja A hay exactamente tres tarjetas, entonces siempre se puede asegurar, sin importar la configuración, que:

Ⓐ tres tarjetas de la caja B tienen números impares

Ⓑ cuatro tarjetas de la caja B tienen números pares

Ⓒ la tarjeta con el número 1 no está en la caja B

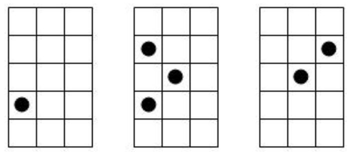
Ⓓ la tarjeta con el número 2 está en la caja B

Ⓔ la tarjeta con el número 5 está en la caja B

1.1.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D), pues al multiplicar 9 por 0, que es la unidad de 200, se obtiene 0 en la unidad del producto y por ende éste será un número par.

2. La respuesta correcta es la (B). En la figura siguiente se muestran los cuadraditos (marcados con un punto) que deben cambiar de color.



3. La respuesta correcta es la (A). Primero, requerimos calcular el perímetro del rectángulo, el cual es $8 \times 2 + 4 \times 2 = 24$ cm. Como el cuadrado tiene todos los lados iguales, para que el perímetro de éste sume 24 cm cada lado debe ser igual a $24 \div 4 = 6$ cm.

4. La respuesta correcta es la (C). Lanzando cuatro veces el dado, el máximo puntaje que se puede obtener es 24 puntos que se generan obteniendo 6 puntos en cada lanzamiento. Por tanto, para obtener 23 puntos, alguna de las cuatro veces tuvo que haber sacado 5 puntos y las otras tres veces 6 puntos.

5. La respuesta correcta es la (B). El primer número a borrar es el 4 porque aparece una única vez en un extremo y de esa manera ya tendríamos el comienzo y el final del número igual. Si quisieramos dejar el 2 que viene después del 1 de izquierda a derecha, tendríamos que tener el 2 inmediatamente antes del 1 teniendo que borrar los dos números 3 que se encuentran en el medio. Asi, borrando 3 números se obtiene el número 12321 capicúa. Otra opción es conseguir el número 13231 borrando de igual forma 3 números.

6. La respuesta correcta es la (A) dado que la manzana se encuentra en la caja roja porque, según el enunciado, no está en ninguna de las otras dos, y entonces el chocolate debe estar en la blanca porque la roja ya está ocupada.

7. La respuesta correcta es la (D) porque el prisma sin hueco tiene 5 caras y el hueco le agrega 3 más. Note que la cara frontal y la posterior del hueco son la misma que del prisma sin hueco, por tanto, se deben contar una única vez.

8. La respuesta correcta es la (D). Sea x la longitud del puente. Entonces $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x + 120$, de donde al despejar x se obtiene $x = 240$ m.

9. La respuesta correcta es la (C). El lado del cuadrado más pequeño mide 20 cm, el lado del mediano 40 cm (porque se forma con dos pequeños) y el lado del grande 60 cm (porque se forma con uno mediano y uno pequeño). Por tanto la línea mide, comenzando desde la punta que toca el lado superior $20 \times 2 + 40 \times 5 + 60 \times 2 + 20 \times 3 = 420$ m.

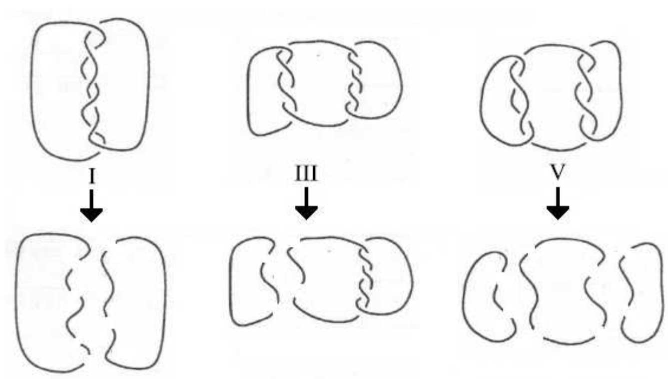
10. La respuesta correcta es la (B). Si llamamos x al número de gatos e y al número de perros, entonces tendríamos la ecuación:

$$4x = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y,$$

es decir, que el número de gatos es la mitad del número de perros.

11. La respuesta correcta es la (E) puesto que el dígito más pesado es el número 8, cuyo peso es 7, y por tanto el número de dos cifras más pesado es el 88, que pesa 14.

12. La respuesta correcta es la (B). Observemos que



13. La respuesta correcta es la (C). Si trazamos la diagonal BD del cuadrilátero, podríamos observar que se forman dos triángulos rectángulos. En el primer caso, el triángulo BAD cuyo área es $\frac{11\times3}{2} = \frac{33}{2}$, y el triángulo BCD cuyo área es $\frac{7\times9}{2} = \frac{63}{2}$. Por tanto, el área del cuadrilátero será la suma de las áreas de los triángulos dando como resultado $\frac{33+63}{2} = 48$.

14. La respuesta correcta es la (D). Sea x el número de semanas que pasan hasta igualarse el número de muchachas con el de muchachos. Entonces $39 + 6x = 23 + 8x$, de donde se obtiene $x = 8$, haciendo que en ese momento haya 87 muchachos y 87 muchachas y por ende, 174 integrantes en el grupo de baile.

15. La respuesta correcta es la (E). El área del rectángulo con parte gris oscura es 80 y el área del rectángulo con parte gris clara es 108. Al solaparse, como la parte gris oscura es 37 entonces la blanca es $80 - 37 = 43$ y como esa parte pertenece a ambos rectángulos, el área gris clara es $108 - 43 = 65$.

16. La respuesta correcta es la (A). El perímetro del cuadrado es $9 \times 4 = 36$ cm. El triángulo equilátero tiene todos los lados iguales así que cado lado debe medir 12 cm para tener el mismo perímetro 36 cm. El lado del triángulo mide lo mismo que dos de los lados del rectángulo, por tanto, el lado pequeño del rectángulo se encuentra resolviendo la ecuación $12\times2+2\times x = 36$ dando como resultado que el lado pequeño vale 6 cm.

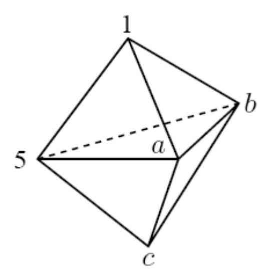
17. La respuesta correcta es la (E). Cada semana, comenzando en domingo y finalizando en sábado, Francisco lee $25 + 4 \times 6 = 49$ páginas. Para saber en cuántas semanas completas Francisco lee el libro, dividimos las 290 páginas entre 49 páginas semanales, obteniendo 5 semanas y faltando 45 páginas por leer. Por tanto, habría que sumar un domingo, que serían 25 páginas, más 5 días de 4 páginas cada uno para finalizar la lectura. Es decir, 5 semanas más 6 días que hacen 41 días consecutivos.

18. La respuesta correcta es la (C). Para que Andrés, Bruno y Daniel sumen el número 6, sus posiciones deben ser 1, 2, 3, pero no necesariamente en ese orden, y para que Bruno y Carlos sumen 6 también, sus posiciones deben ser 2 y 4, respectivamente, para que se cumpla la primera parte. Pero como Bruno, que quedó en la posición 2, quedó mejor ubicado que Andrés, entonces Andrés quedó de tercero y Daniel de primero ganando el torneo.

19. La respuesta correcta es la (D). El área del rectángulo será 2009, por lo tanto, debemos hallar todas las parejas de números que, al multiplicarse, den como resultado 2009. Como 2009 tiene dos sietes y un 41 en su factorización prima, quiere decir que existen 3 diferentes configuraciones para obtener un rectángulo con ese número de piezas: 2009×1, 41×49 y 7×287.

20. La respuesta correcta es la (E) puesto que hace que la primera y la cuarta afirmación sean ciertas y las dos restantes falsas. 11 y 10 hacen que tres afirmaciones sean falsas, 55 hace que sólo la última sea falsa y 0 hace que las cuatro sean verdaderas.

21. La respuesta correcta es la (C). Si denotamos a los demás vértices del sólido como se muestra a continuación:



entonces $1 + 5 + a = 1 + 5 + b = 1 + a + b = 5 + a + c = a + b + c$, de donde se deduce que $a = b = 5$ y $c = 1$. Luego, $1 + 5 + a + b + c = 17$.

22. La respuesta correcta es la (E). En todos los pisos las habitaciones pueden ser 2, 12, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32; es decir, 14 veces se utiliza el 2 en cinco pisos, lo que da un total de 70 veces. Pero además, en el segundo piso se utiliza el 2 como cifra de las centenas 35 veces (por ser 35 habitaciones por piso) dando un total de $70 + 35 = 105$.

23. La respuesta correcta es la (B). Los triángulos isósceles no sombreados son isorrectángulos. Si cada uno de ellos se desplaza hacia el centro del cuadrado, hasta que los vértices de sus ángulos rectos coincidan, se forma un cuadrado cuyos lados son las hipotenusas de los triángulos. Como el lado de ese cuadrado mide 6 cm, su área es 36 cm^2. Dado que el cuadrado $ABCD$ es de lado 10 cm, $NM = 6$ cm y los cuadrados no sombreados son iguales, entonces el lado de cualquiera de estos últimos cuadrados mide 2 cm y su área es 4 cm^2. Como hay cuatro cuadrados no sombreados en la figura, entonces la suma de sus áreas es 16 cm^2. Luego, el área de la región sombreada dentro del cuadrado $ABCD$ es $10^2 - (36 + 16)$ cm$^2 = 48$ cm^2.

24. La respuesta correcta es la (A). El volumen de la caja es 45000 cm^3. Los cubos sólidos con los que tenemos que llenar deben ser de igual tamaño y por ser cubos, el volumen de cada uno se forma elevando al cubo el valor del lado. Note que el único valor que se puede tener es 45×1000 lo que indica que se requieren 45 cubos de volumen 1000 que representa un cubo de lado 10.

25. La respuesta correcta es la (C), puesto que para cumplir los totales de cada fila y columna, el cuadrado debe valer 4, el triángulo 1 y la otra figura 3, por lo que se obtendría $4 + 3 - 1 = 6$.

26. La respuesta correcta es la (E). Analicemos los seis casos al dejar fijo uno de los lados. Dejando fijo el 0 para un lado, se tienen 21 puntos al sumar los otros valores posibles. Al dejar fijo el 1, se tienen 27. Recuerde que es la misma ficha el $0|1$ que el $1|0$ y se cuenta una única vez. Al dejar fijo el 2, se tienen 30. Con el 3 fijo, 30 nuevamente. Con el 4 fijo, se tienen 27. Con el 5 fijo se tienen 21 y finalmente con el 6 fijo se tienen 12. Al sumarlos todos se obtiene un total de $21 + 27 + 30 + 30 + 27 + 21 + 12 = 168$.

27. La respuesta correcta es la (B). Para resolver este problema se debe ir de atrás hacia adelante, es decir, buscar dos número que sumados den 96 pero que restados den 64 para llenar la fila número 6 y así ir subiendo hasta la primera fila. Note que el orden como coloque los números en la fila no es importante. Entonces, en la fila 6 se tienen los números 80 y 16; en la fila 5, 48 y 32; en la fila 4, 40 y 8; en la fila 3, 24 y 16; en la fila 2, 20 y 4 y por tanto, en la fila 1 se tienen 12 y 8 cuya suma es 20.

28. La respuesta correcta es la (A). Una situación que muestra un grupo con el menor número de personas posibles y que satisface las condiciones dadas, se describe a continuación: 5 personas compran 6 pares de zapatos con las tallas 36, 38, 40, 42, 44 y 45, de manera que cada persona se quede con los pares de zapatos 38-36, 40-38, 42-40, 44-42 y 45-44, sobrando, así, un zapato talla 36 y otro talla 45.

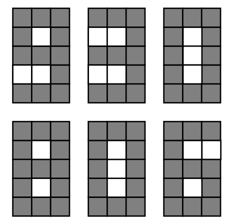
29. La respuesta correcta es la (A). La casilla cenral de la primera fila sólo se puede colorear con A o con D. En el primer caso, la casilla central de la segunda fila sólo puede ser D y a partir de allí el tablero sólo se puede colorear como se indica en la figura de la izquierda. En el segundo caso el tablero sólo se puede colorear como se indica en la figura de la derecha. En ambos casos, el único color posible para la casilla sombreada es A.

A	B	D	C	D
D	C	A	B	A
A	B	D	C	D
D	C	A	B	A

A	B	A	C	D
D	C	D	B	A
A	B	A	C	D
D	C	D	B	A

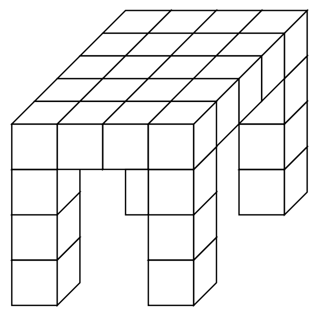
30. La respuesta correcta es la (D). Existen tres posibilidades para las tarjetas que se encuentran en la caja A. Estas son: las tarjetas numeradas con 8, 7 y 3; las tarjetas numeradas con 8, 6 y 4; las tarjetas numeradas con 7, 6 y 5, sumando en cada caso 18. Para dicho caso, las tarjetas sobrantes en la caja B son 1, 2, 4, 5 y 6; 1, 2, 3, 5 y 7; y 1, 2, 3, 4, y 8, respectivamente. La opción A sólo se cumple en la segunda configuración; la opción B no se cumple en la segunda configuración, el número 1 sí se encuentra en la caja B, por tanto la opción C es incorrecta, el número 5 no se encuentra en la caja B en la configuración 3 rechazando la opción E y dejando como única verdadera la opción D puesto que la tarjeta con el número 2 sí se encuentra en la caja B para todas las posibles

1.2. Prueba de 8º y 9º grados



1. La figura superior muestra el número 930 en una pantalla formada por cuadraditos blancos y negros. ¿Cuántos de esos cuadraditos deben cambiar de color para formar el número 806 de la figura inferior?

Ⓐ 9 Ⓑ 8 Ⓒ 7 Ⓓ 6 Ⓔ 5

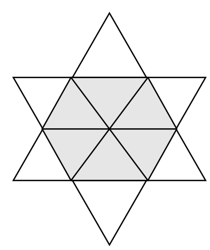


2. Tomás construyó una mesa con cubos (ver figura). ¿Cuántos cubos utilizó?

Ⓐ 36 Ⓑ 32 Ⓒ 28 Ⓓ 26 Ⓔ 24

3. En una fiesta había 4 muchachos y 4 muchachas. Los muchachos bailaron sólo con muchachas, y las muchachas bailaron sólo con muchachos. Luego de la fiesta se le preguntó a cada uno cuántas parejas de baile tuvieron. Los muchachos respondieron: 3, 1, 2, 2. Tres de las muchachas dijeron: 2, 2, 2. ¿Qué respondió la cuarta muchacha?

Ⓐ 2 Ⓑ 0 Ⓒ 3 Ⓓ 1 Ⓔ 4



4. La estrella que muestra la figura está formada con 12 pequeños triángulos equiláteros idénticos. El perímetro de la estrella es 36 cm. ¿Cuál es el perímetro del hexágono sombreado?

Ⓐ 6 cm Ⓑ 12 cm Ⓒ 18 cm
Ⓓ 24 cm Ⓔ 30 cm

5. Las casas de la calle Larga están numeradas consecutivamente desde el 15 hasta el 53. Juan es repartidor y debe entregar un paquete en cada casa con número impar. ¿Cuántos paquetes debe entregar Juan?

Ⓐ 19 Ⓑ 20 Ⓒ 27 Ⓓ 38 Ⓔ 53

6. Dos cerdos, uno blanco y uno negro, pesan juntos 320 kilos. El cerdo negro pesa 32 kilos más que el cerdo blanco. ¿Cuánto pesa el cerdo blanco?

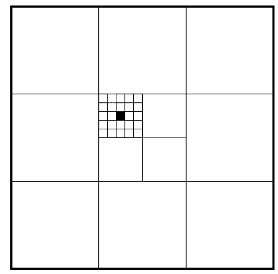
Ⓐ 144 kg Ⓑ 156 kg Ⓒ 160 kg Ⓓ 176 kg Ⓔ 192 kg

7. El producto de cuatro enteros positivos diferentes es 100. ¿Cuál es su suma?

Ⓐ 10 Ⓑ 12 Ⓒ 15 Ⓓ 18 Ⓔ 20

8. El área del cuadrado más grande es 1. ¿Cuál es el área del pequeño cuadradito negro?

Ⓐ $\frac{1}{100}$ Ⓑ $\frac{1}{300}$ Ⓒ $\frac{1}{600}$ Ⓓ $\frac{1}{900}$ Ⓔ $\frac{1}{1000}$

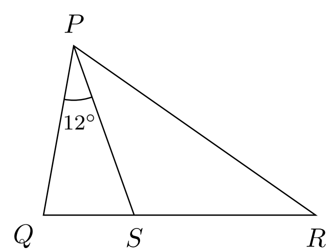


9. En una habitación hay perros y gatos. El número de las patas de los gatos es el doble del número de las narices de los perros. Entonces el número de gatos es:

Ⓐ el doble del número de perros Ⓑ igual al número de perros
Ⓒ la mitad del número de perros Ⓓ $\frac{1}{4}$ del número de perros
Ⓔ $\frac{1}{6}$ del número de perros

10. En la figura, S es un punto en el lado QR del triángulo PQR tal que $PQ = PS = RS$ y el ángulo $\angle QPS$ mide 12°. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle QPR$?

Ⓐ 36° Ⓑ 54° Ⓒ 60° Ⓓ 72° Ⓔ 84°



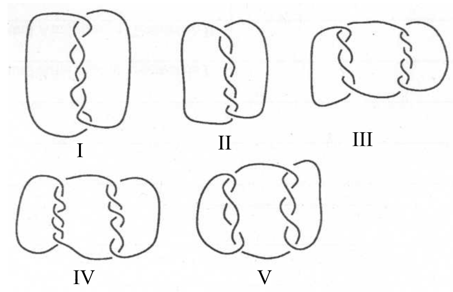
11. Un ascensor puede cargar 12 adultos o 20 niños. ¿Cuál es el máximo número de niños que pueden subir con 9 adultos?

Ⓐ 3 Ⓑ 8 Ⓒ 4 Ⓓ 6 Ⓔ 5

12. ¿Cuántos enteros positivos tienen la propiedad de que su cuadrado tiene la misma cantidad de dígitos que su cubo?

Ⓐ 1 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 9 Ⓔ infinitos

13. ¿Cuáles de los siguientes lazos consisten de más de un pedazo de cuerda?



Ⓐ I, III, IV y V

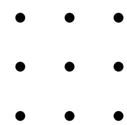
Ⓑ III, IV y V

Ⓒ I, III y V

Ⓓ todos

Ⓔ ninguno

14. ¿Cuál es el mínimo número de puntos que hay que remover en la figura para que, entre los restantes, no haya tres alineados?

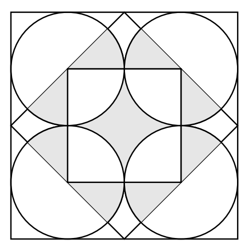


Ⓐ 7 Ⓑ 2 Ⓒ 4 Ⓓ 3 Ⓔ 1

15. Nicolás midió los seis ángulos de dos triángulos, uno de ellos acutángulo y el otro obtusángulo. Él recuerda cuatro de esos ángulos: $120°$, $80°$, $55°$ y $10°$. ¿Cuánto mide el menor de los ángulos del triángulo acutángulo?

Ⓐ $5°$ Ⓑ $15°$ Ⓒ $25°$ Ⓓ $35°$ Ⓔ $45°$

16. ¿Qué porción del cuadrado más grande está sombreada?

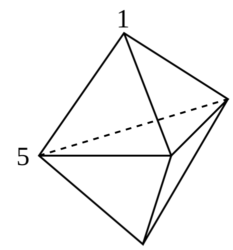


Ⓐ $\frac{1}{4}$ Ⓑ $\frac{\pi}{12}$ Ⓒ $\frac{\pi+2}{16}$ Ⓓ $\frac{\pi}{4}$ Ⓔ $\frac{1}{3}$

17. En la isla de los nobles y los mentirosos hay 25 personas paradas en una fila. Cada uno de ellos, excepto la primera persona de la fila, afirma que la persona que tiene adelante es un mentiroso. El primero de la fila afirma que todos los que están detrás suyo son mentirosos. ¿Cuántos mentirosos hay en la fila? (Los nobles siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten.)

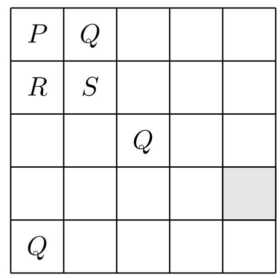
Ⓐ 25 Ⓑ 24 Ⓒ 0 Ⓓ 12 Ⓔ 13

18. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara se considera la suma de los 3 números en los vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números?



(A) 9 (B) 12 (C) 17 (D) 18 (E) 24

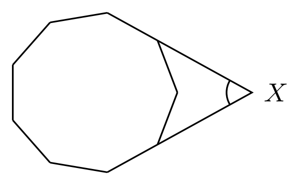
19. Se desea colorear las casillas del tablero de la figura usando los colores P, Q, R y S, de manera tal que casillas vecinas tengan colores diferentes (dos casillas se consideran vecinas si tienen al menos un vértice común). Algunas casillas ya han sido coloreadas como muestra la figura. ¿Qué posibilidades hay para la casilla sombreada?



(A) sólo Q (B) sólo R (C) sólo S

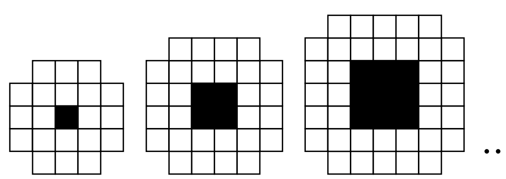
(D) R o S (E) imposible

20. El diagrama muestra un polígono regular de 9 lados. ¿Cuánto mide el ángulo indicado de vértice X?



(A) 40° (B) 45° (C) 50° (D) 55° (E) 60°

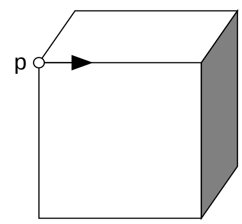
21. La figura muestra los tres primeros diagramas de una secuencia. Si no se toma en cuenta el hueco negro central, ¿cuántos cuadraditos hacen falta para construir el décimo diagrama de la secuencia?



(A) 76 (B) 80 (C) 92

(D) 96 (E) 100

22. Una hormiga camina por las aristas de un cubo, comenzando en el punto P en la dirección indicada por la flecha. Al final de la primera arista puede escoger seguir hacia la derecha o hacia la izquierda, y lo mismo ocurre al final de la segunda arista y de cada una de las siguientes. Si escoge alternadamente derecha e izquierda, ¿después de recorrer cuántas aristas regresará al punto P por primera vez?

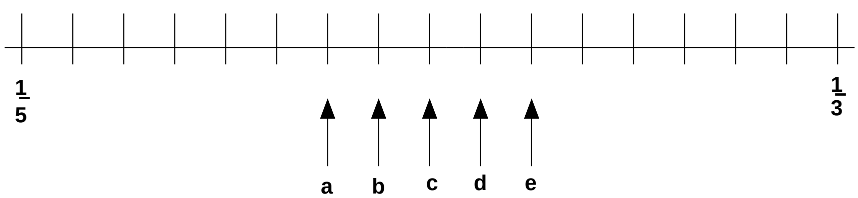


Ⓐ 2 Ⓑ 9 Ⓒ 4 Ⓓ 12 Ⓔ 6

23. En el país Piesraros, todos tienen el pie izquierdo una o dos tallas más grande que el pie derecho. Sin embargo, los zapatos se venden en pares del mismo tamaño. Para ahorrar, un grupo de amigos deciden comprar un lote de zapatos: cada uno toma dos zapatos que le queden, y sobran un zapato talla 36 y otro talla 45. El mínimo número de personas en el grupo es

Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 6 Ⓓ 7 Ⓔ 8

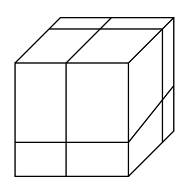
24. Las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ se colocan en la recta numérica.



¿Dónde va la fracción $\frac{1}{4}$?

Ⓐ a Ⓑ b Ⓒ c Ⓓ d Ⓔ e

25. A un cubo grande se le hacen tres cortes que lo dividen en ocho prismas rectangulares. ¿Cuál es la razón entre el área *total* de esos ocho prismas y el área del cubo original?



Ⓐ 1 : 1 Ⓑ 4 : 3 Ⓒ 2 : 1 Ⓓ 3 : 2 Ⓔ 4 : 1

26. Verónica escribió una secuencia de números naturales diferentes no mayores que 10. Roberto examinó los números y notó con satisfacción que para cada par de números vecinos, uno de ellos era divisible por el otro. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pudo haber escrito Verónica?

Ⓐ 6 Ⓑ 8 Ⓒ 7 Ⓓ 10 Ⓔ 9

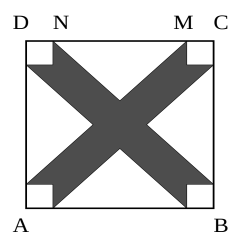
27. Un cuadrado ha sido dividido en 2009 cuadrados con lados de longitud entera. ¿Cuál es la menor longitud posible del lado del cuadrado original?

Ⓐ 44 Ⓑ 45

Ⓒ 46 Ⓓ 503

Ⓔ No es posible dividir un cuadrado de ese modo

28. ABCD es un cuadrado de 10 cm de lado. La distancia del punto N al punto M es 6 cm. Cada región no sombreada representa triángulos isósceles iguales o cuadrados iguales. Halle el área de la región sombreada dentro del cuadrado ABCD.



Ⓐ48cm^2 Ⓑ 50cm^2 Ⓒ 52cm^2 Ⓓ 55cm^2 Ⓔ 58cm^2

29. Si se coloca un cuadrado de 6 cm $\times$ 6 cm sobre un triángulo, se puede cubrir hasta un 60% del triángulo. Si se coloca el triángulo sobre el cuadrado, se puede cubrir hasta $\frac{2}{3}$ del cuadrado. ¿Cuál es el área del triángulo?

Ⓐ 40 cm^2 Ⓑ 60 cm^2 Ⓒ 24 cm^2 Ⓓ 36 cm^2 Ⓔ $22\frac{4}{5}$ cm^2

30. Todos los divisores del entero positivo N, diferentes de N y 1, se escriben en una línea. Se observa que el mayor de los divisores en la línea es 45 veces más grande que el menor. ¿Cuántos números N satisfacen esta condición?

Ⓐ 1 Ⓑ 0 Ⓒ 3

Ⓓ 2 Ⓔ es imposible determinarlo

1.2.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D). Ver explicación para el problema 2 de 7º grado, página 9.

2. La respuesta correcta es la (B). Para construir las patas utilizó $4 \times 3 = 12$ cubos y para la parte de arriba de la mesa utilizó $4 \times 5 = 20$ cubos. En total, Tomás usó $12 + 20 = 32$ cubos.

3. La respuesta correcta es la (A), ya que los muchachos, en general, tuvieron la oportunidad de bailar 8 veces con las muchachas. Ese también es el número de veces que las muchachas tuvieron oportunidad de bailar con los muchachos y como tres de las muchachas tuvieron, en general, 6 oportunidades, eso significa que la cuarta muchacha debió bailar en 2 oportunidades con algunos de los muchachos.

4. La respuesta correcta es la (C), ya que para calcular el perímetro de la estrella se tuvo que sumar las longitudes de doce de los lados de algunos de los triángulos. Como para el perímetro del hexágono se requiere de la suma de las longitudes de seis de los lados de algunos de los triángulos y todos los triángulos son equiláteros e idénticos, entonces el perímetro del hexágono es la mitad del perímetro de la estrella, es decir, 18 cm.

5. La respuesta correcta es la (B), ya que desde el 15 hasta el 53 hay 20 números impares.

6. La respuesta correcta es la (A). Si llamamos x al peso del cerdo blanco, entonces tendríamos la ecuación:

$$x + (x + 32) = 320 \Rightarrow x = 144.$$

7. La respuesta correcta es la (D). Si descomponemos a 100 en el producto de sus factores primos, tendríamos que $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, de donde tenemos que la única forma de escribir a 100 como el producto de cuatro positivos diferentes es $100 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10$ y la suma de estos números es $1+2+5+10 = 18$.

8. La respuesta correcta es la (D), pues el área del pequeño cuadradito negro es

$$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{900}.$$

9. La respuesta correcta es la (C). Ver explicación para el problema 10 de 7º grado, página 10.

10. La respuesta correcta es la (B). Como $PQ = PS$, entonces

$$\measuredangle PSQ = \measuredangle PQS = \frac{180^\circ - \measuredangle QPS}{2} = \frac{180^\circ - 12^\circ}{2} = 84^\circ.$$

Luego, $\measuredangle PSR = 180^\circ - \measuredangle PSQ = 180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$.

Y, como $PS = RS$, entonces

$$\measuredangle SPR = \measuredangle SRP = \frac{180° - \measuredangle PSR}{2} = \frac{180° - 96°}{2} = 42°.$$

Así, finalmente, tenemos que

$$\measuredangle QPR) = \measuredangle QPS + \measuredangle SPR = 12° + 42° = 54°.$$

11. La respuesta correcta es la (E). Dado que el ascensor puede cargar 12 adultos o 20 niños, eso significa que 3 adultos "equivalen" a 5 niños. Luego, si hay 9 adultos en el ascensor, faltarían 3 adultos más para alcanzar la carga máxima del ascensor o, lo que es lo mismo, 5 niños.

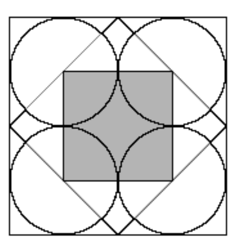
12. La respuesta correcta es la (B). Observemos primero que los números 1, 2 y 4, cumplen con lo que pide el problema, pues $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $4^2 = 16$ y $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $4^3 = 64$. Ellos son los únicos pues, para cualquier otro número, su cubo tendrá más dígitos que su cuadrado.

13. La respuesta correcta es la (C). Ver explicación para el problema 12 de 7º grado, página 10.

14. La respuesta correcta es la (D) pues basta con remover los tres puntos de cualquiera de las diagonales (si sólo se remueven uno o dos puntos, quedará al menos una fila con tres puntos alineados).

15. La respuesta correcta es la (E). Es claro que uno de los ángulos de triángulo obtusángulo es 120º.
Los ángulos de 80°, 55° y 10º no pueden ser todos del triángulo acutángulo porque la suma de los tres no es 180°. Luego, al menos uno de ellos es también del triángulo obtusángulo.
No puede ser el ángulo de 80° porque la suma $120° + 80° = 200° > 180º$.
Tampoco puede ser el ángulo de 55°, porque así el tercer ángulo del triángulo obtusángulo sería de 5°, por lo que los ángulos del triángulo acutángulo serían 80°, 10° y 90°, lo que no es posible debido a que el ángulo de 90° no es agudo.
Finalmente los ángulos del triángulo obtusángulo son 120°, 10° y 50°, mientras que los del triángulo acutángulo son 80°, 55° y 45°, siendo el menor de éstos el ángulo de 45°.

16. La respuesta correcta es la (A). Dado que al "reacomodar" convenientemente algunas de las porciones sombreadas en la figura, se puede obtener



en el que el cuadrado sombreado representa $\frac{1}{4}$ de porción del cuadrado más grande.

17. La respuesta correcta es la (D). Si el primero fuese caballero, el segundo sería mentiroso, y así el tercero también sería caballero, lo cual no es posible. Si el primero es mentiroso, el segundo es caballero, el tercero es mentiroso, y así sucesivamente. De esta forma los que están en posición par son caballeros y los que ocupan posición impar son mentirosos. Hay 13 mentirosos en la fila.

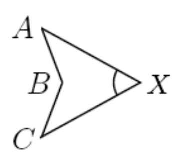
18. La respuesta correcta es la (C). Ver explicación para el problema 21 de 7º grado, página 11.

19. La respuesta correcta es la (D), ya que sólo hay dos formas de colorear las casillas del tablero de acuerdo a las condiciones dadas:

P	Q	P	Q	P
R	S	R	S	R
Q	P	Q	P	Q
R	S	R	S	R
Q	P	Q	P	Q

P	Q	P	Q	P
R	S	R	S	R
Q	P	Q	P	Q
S	R	S	R	S
Q	P	Q	P	Q

20. La respuesta correcta es la (E). Denotemos con las letras A, B y C a los demás vértices del cuadrilátero.



Dado que la medida de un ángulo interior de un polígono regular de 9 lados es

$$\frac{(9-2)\cdot 180°}{9} = \frac{7\cdot 180°}{9} = 140°,$$

entonces la medida de cada uno de los ángulos $\angle A$ y $\angle C$ del cuadrilátero $ABCX$ es $180° - 140° = 40°$ y la medida del ángulo $\angle B$ del mismo cuadrilátero es $360° - 140° = 220°$.
Luego, la medida del ángulo X es $360° - (220° + 40° + 40°) = 60°$.

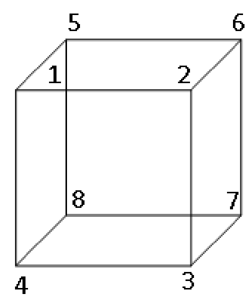
21. La respuesta correcta es la (C). El número de cuadritos que se utilizan para construir

- el primer diagrama de la secuencia son $(5^2 - 4) - 1^2$.
- el segundo diagrama de la secuencia son $(6^2 - 4) - 2^2$.

- el tercer diagrama de la secuencia son $(7^2 - 4) - 3^2$.

por lo que el número de cuadritos que hacen falta para construir el décimo diagrama de la secuencia es $(14^2 - 4) - 10^2 = 92$.

22. La respuesta correcta es la (E). Enumerando los vértices del sólido como se muestra en la figura se observa que la secuencia de vértices que recorre la hormiga es $1 - 2 - 3 - 7 - 8 - 5 - 1$. Por tanto, recorre 6 aristas.



23. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 28 de 7º grado, página 12.

24. La respuesta correcta es la (A). Si escribimos $\frac{1}{3} = \frac{24}{120}$, $\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$ y $\frac{1}{5} = \frac{40}{120}$, tendremos que las marcas de la recta numérica que siguen después de $\frac{1}{5}$ corresponden perfectamente con las fracciones $\frac{25}{120}, \frac{26}{120}, \frac{27}{120}, \ldots$ y, justamente, la marca indicada con la letra **a** es la que corresponde a la fracción $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.

25. La respuesta correcta es la (C). Por cada par de caras paralelas del cubo, los ocho prismas rectangulares conforman cuatro caras paralelas que incluyen al par de caras paralelas del cubo original.
Esto nos lleva a que si el área del cubo original es seis veces el área de una de sus caras, entonces el área total de los ocho prismas es doce veces el área de una de las caras del cubo original. Luego, la razón entre el área total de esos ocho prismas y el área del cubo original es $12 : 6$, esto es, $2 : 1$.

26. La respuesta correcta es la (E). Una forma de escribir nueve números es 8, 4, 1, 5, 10, 2, 6, 3, 9. No se pueden escribir 10 porque el 7 debería ocupar un extremo, al lado del 1, y no hay forma de acomodar los 8 restantes.

27. La respuesta correcta es la (B). El menor cuadrado perfecto mayor o igual a 2009 es $45^2 = 2025$.
Si un cuadrado de lado 45 es dividido en 2 cuadrados de lado 3 y 2007 cuadrados de lado 1 se satisfacen las condiciones indicadas.

28. La respuesta correcta es la (A). Ver explicación para el problema 23 de 7º grado, página 11.

29. La respuesta correcta es la (A). Es claro que la mayor superficie del cuadrado que se puede cubrir con el triángulo es igual a la mayor superficie del triángulo que se puede cubrir con el cuadrado. Asi, si x es el área del triángulo, se tiene que $0,6 \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 36$ cm^2, de donde $x = 40$ cm^2.

30. La respuesta correcta es la (D). Si llamamos d al menor de estos divisores de N que están en la línea, entonces el mayor de estos divisores es $45d$. Luego, debe ocurrir que $d \cdot (45d) = 45d^2 = N$.
Es claro que d debe ser primo y que los únicos valores posibles de d son 2 y 3, ya que si d es un primo mayor que 3 tendríamos una contradicción dado que tendríamos que el menor divisor de $N = 45d^2$ sería 3 (por ser el menor divisor de 45 distinto de 1).
Luego, sólo tendremos 2 números N ($180 = 45 \cdot 2^2$ y $405 = 45 \cdot 3^2$) que satisfacen la condición indicada.

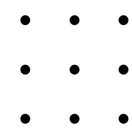
1.3. Prueba de 1º y 2º de diversificado

1. ¿Cuál de los siguientes números es múltiplo de 3?

Ⓐ 2009 Ⓑ $2+0+0+9$ Ⓒ 2^9

Ⓓ $(2+0)\cdot(0+9)$ Ⓔ $200-9$

2. ¿Cuál es el mínimo número de puntos que hay que remover en la figura para que, entre los restantes, no haya tres alineados?



Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5 Ⓔ 6

3. En una carrera participaron 2009 personas. El número de personas a las que Juan les ganó es el triple del de aquellas que le ganaron a Juan. ¿En qué lugar llegó Juan?

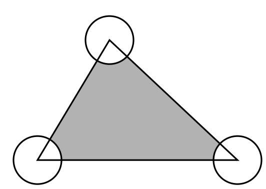
Ⓐ 503 Ⓑ 501 Ⓒ 500 Ⓓ 1503 Ⓔ 1507

4. ¿Cuál es el valor de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{4}{5}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{6}{7}$ de $\frac{7}{8}$ de $\frac{8}{9}$ de $\frac{9}{10}$ de 1000?

Ⓐ 250 Ⓑ 200 Ⓒ 100

Ⓓ 50 Ⓔ ninguna de las anteriores

5. El área del triángulo de la figura es 80 m^2 y el radio de los círculos centrados en los vértices es 2 m.



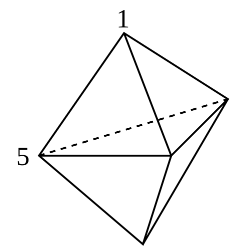
¿Cuál es la medida, en m^2, del área sombreada?

Ⓐ 76 Ⓑ $80-2\pi$ Ⓒ $40-4\pi$ Ⓓ $80-\pi$ Ⓔ 78π

6. En un acuario hay 200 peces. El 1 % de ellos son azules, y todos los demás son amarillos. ¿Cuántos peces amarillos habría que sacar del acuario para que el porcentaje de peces azules fuese el 2 % del total de peces en el acuario?

Ⓐ 100 Ⓑ 50 Ⓒ 20 Ⓓ 2 Ⓔ 4

7. La figura muestra un sólido formado con 6 caras triangulares. En cada vértice hay un número. Para cada cara se considera la suma de los 3 números en los vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números?

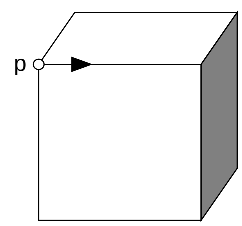


(A) 9 (B) 12 (C) 14 (D) 17 (E) 18

8. Una larga secuencia de dígitos se ha compuesto escribiendo el número 2009 repetidamente 2009 veces. La suma de los dígitos impares de la secuencia que son seguidos immediatamente por un dígito par es igual a:

(A) 2 (B) 9 (C) 4018 (D) 18072 (E) 18081

9. Una hormiga camina por las aristas de un cubo, comenzando en el punto P en la dirección indicada por la flecha. Al final de la primera arista puede escoger seguir hacia la derecha o hacia la izquierda, y lo mismo ocurre al final de la segunda arista y de cada una de las siguientes. Si escoge alternadamente derecha e izquierda, ¿después de recorrer cuántas aristas regresará al punto P por primera vez?



(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 12

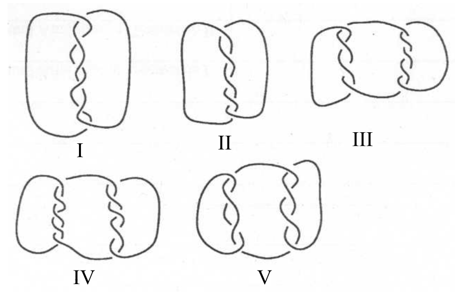
10. ¿Cuántos enteros positivos tienen la propiedad de que su cuadrado tiene la misma cantidad de dígitos que su cubo?

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) 9 (E) infinitos

11. Leonardo ha escrito una secuencia de números tales que cada número, a partir del tercero en la secuencia, es la suma de los dos números que le preceden. El cuarto número de la secuencia es 6 y el sexto es 15. ¿Cuál es el séptimo número de la secuencia?

(A) 9 (B) 16 (C) 21 (D) 22 (E) 24

12. ¿Cuáles de los siguientes lazos consisten de más de un pedazo de cuerda?



Ⓐ I, III, IV y V

Ⓑ I, III y V

Ⓒ III, IV y V

Ⓓ todos

Ⓔ ninguno

13. En cada examen la puntuación puede ser 0, 1, 2, 3, 4 o 5. Luego de 4 exámenes el promedio de María es 4. Una de las siguientes afirmaciones no puede ser verdadera. ¿Cuál es?

Ⓐ María sólo obtuvo cuatros.

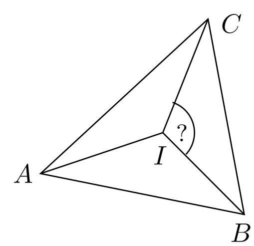
Ⓑ María obtuvo 3 exactamente dos veces.

Ⓒ María obtuvo 3 exactamente 3 veces.

Ⓓ María obtuvo 1 exactamente una vez.

Ⓔ María obtuvo 4 exactamente 2 veces.

14. Las tres bisectrices del triángulo ABC se cortan en el punto I. Si el ángulo $\angle BAC$ mide 68°, ¿cuántos grados mide el ángulo $\angle BIC$?



Ⓐ 136° Ⓑ 132° Ⓒ 128° Ⓓ 124° Ⓔ 120°

15. ¿Para cuántos enteros positivos n la diferencia entre $\sqrt{n}$ y 10 (en valor absoluto) es menor que 1?

Ⓐ 19 Ⓑ 26 Ⓒ 30 Ⓓ 35 Ⓔ 39

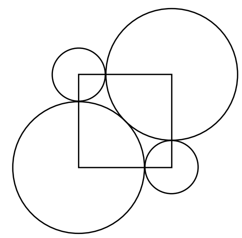
16. Verónica escribió una secuencia de números naturales diferentes no mayores que 10. Roberto examinó los números y notó con satisfacción que para cada par de números vecinos, uno de ellos era divisible por el otro. ¿Cuál es la mayor cantidad de números que pudo haber escrito Verónica?

Ⓐ 9 Ⓑ 6 Ⓒ 8 Ⓓ 7 Ⓔ 10

17. Si $a\Box b = ab + a + b$ y $3\Box 5 = 2\Box x$, entonces x es igual a:

Ⓐ 3 Ⓑ 10 Ⓒ 6 Ⓓ 12 Ⓔ 7

18. Con centro en cada vértice de un cuadrado se dibujan 4 circunferencias, 2 grandes y dos pequeñas. Las dos grandes son tangentes entre sí y con las dos pequeñas. ¿El radio de una circunferencia grande es igual a cuántas veces el radio de una circunferencia pequeña?



Ⓐ $\frac{2}{9}$ Ⓑ $\sqrt{5}$ Ⓒ $1+\sqrt{2}$

Ⓓ $2,5$ Ⓔ $0,8\pi$

19. En la isla de los nobles y los mentirosos hay 25 personas paradas en una fila. Cada uno de ellos, excepto la primera persona de la fila, afirma que la persona que tiene adelante es un mentiroso. El primero de la fila afirma que todos los que están detrás suyo son mentirosos. ¿Cuántos mentirosos hay en la fila? (Los nobles siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten.)

Ⓐ 0 Ⓑ 12 Ⓒ 24

Ⓓ 13 Ⓔ es impossible determinarlo

20. ¿Cuántos ceros deben insertarse en el lugar del $*$ en la fracción decimal $1.*1$ para obtener un número menor que $\frac{2009}{2008}$ pero mayor que $\frac{20009}{20008}$?

Ⓐ 1 Ⓑ 4 Ⓒ 2 Ⓓ 5 Ⓔ 3

21. Si $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ y $c = 3^{11}$, entonces

Ⓐ $a < b < c$ Ⓑ $b < a < c$ Ⓒ $c < b < a$ Ⓓ $c < a < b$ Ⓔ $b < c < a$

22. Si se coloca un cuadrado de 6 cm $\times$ 6 cm sobre un triángulo, se puede cubrir hasta un 60% del triángulo. Si se coloca el triángulo sobre el cuadrado, se puede cubrir hasta $\frac{2}{3}$ del cuadrado. ¿Cuál es el área del triángulo?

Ⓐ 60 cm^2 Ⓑ 24 cm^2 Ⓒ 36 cm^2 Ⓓ $22\frac{4}{5}$ cm^2 Ⓔ 40 cm^2

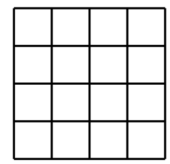
23. El joven Canguro tiene 2009 cubos de $1 \times 1 \times 1$ con los cuales arma un prisma rectangular. También tiene 2009 calcomanías de 1×1 que debe usar para cubrir la superficie externa del prisma. El joven Canguro logra su objetivo y le sobran calcomanías. ¿Cuántas calcomanías le sobraron?

Ⓐ más de 1000 Ⓑ 763

Ⓒ 476 Ⓓ 49

Ⓔ El joven Canguro no pudo haber logrado su objetivo

24. Roberto desea poner fichas en las casillas de un tablero de 4×4 de manera tal que los números totales de fichas en cada fila y en cada columna del tablero sean todos diferentes (en cada casilla se pueden colocar cero, una o más fichas). ¿Cuál es el menor número posible de fichas para el cual esto se puede lograr?



Ⓐ 14 Ⓑ 15 Ⓒ 18 Ⓓ 21 Ⓔ 25

25. Algunas naranjas, duraznos, manzanas y bananas se ponen en fila, de manera tal que cada tipo de fruta puede hallarse al lado de cada otro tipo de fruta en alguna parte de la fila. ¿Cuál es el menor número de frutas en la fila?

Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 8

Ⓓ 11 Ⓔ la situación es imposible

26. ¿Cuál es el menor entero positivo n para el cual

$$(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdots (n^2 - 1)$$

es un cuadrado perfecto?

Ⓐ 3 Ⓑ 6 Ⓒ 10

Ⓓ 20 Ⓔ ninguna de las anteriores

27. Todos los divisores del entero positivo N, diferentes de N y 1, se escriben en una línea. Se observa que el mayor de los divisores en la línea es 45 veces más grande que el menor. ¿Cuántos números N satisfacen esta condición?

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 0

Ⓓ más de 2 Ⓔ es imposible determinarlo

28. Un canguro está sentado en el origen de un sistema de coordenadas. Él puede dar saltos de 1 unidad horizontal o verticalmente (es decir a la derecha, a la izquierda, hacia arriba o hacia abajo). ¿Cuántos puntos hay en el plano en los cuales el canguro puede estar después de dar exactamente 10 saltos?

Ⓐ 121 Ⓑ 100 Ⓒ 400

Ⓓ 441 Ⓔ ninguna de las anteriores

29. La circunferencia de centro F y radio 13 intersecta a la circunferencia de centro G y radio 15 en los puntos P y Q. El segmento PQ mide 24. ¿Cuál de las siguientes puede ser la longitud del segmento FG?

Ⓐ 14 Ⓑ 9 Ⓒ 15 Ⓓ 12 Ⓔ 18

30. Un número primo se dice que es *extraño* si tiene un solo dígito, o si tiene dos o más dígitos pero los números que se obtienen omitiendo el primero o el último dígito son también primos *extraños*. ¿Cuántos primos extraños hay?

Ⓐ 6 Ⓑ 7 Ⓒ 8 Ⓓ 9 Ⓔ 11

1.3.1. Soluciones

1. La respuesta correcta es la (D), pues $(2+0)\cdot(0+9) = 18$ es múltiplo de 3.

2. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 14 de 8º grado, página 21.

3. La respuesta correcta es la (A). Si indicamos por p_i la persona que ocupó el lugar i y p_n es Juan, entonces llegaron en el orden

$$p_1 \dots p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, \dots p_{2009}$$

y vemos que Juan le ganó a $2009 - n$ personas, mientras que $n - 1$ personas le ganaron a Juan. Como el número de personas a las que Juan les ganó es el triple de aquellas que le ganaron a Juan, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$2009 - n = 3(n-1),$$

de donde $2012 = 4n$ y $n = 503$.

4. La respuesta correcta es la (C), pues

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\left(\frac{6}{7}\left(\frac{7}{8}\left(\frac{8}{9}\left(\frac{9}{10}(1000)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right) = 100.$$

5. La respuesta correcta es la (B). El área de la región sombreada es el área del triángulo (80 m^2) menos el área de tres sectores circulares. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, esos tres sectores completan un semicírculo cuya área es $\pi \cdot 2^2/2 = 2\pi$ m^2. Por lo tanto, el área de la región es $80 - 2\pi$ m^2.

6. La respuesta correcta es la (A), pues como hay 200 peces el 1 % de ellos es 2, es decir, hay 2 peces azules y 198 peces amarillos. Si sacamos 100 peces amarillos, tendremos en total 100 peces dentro del acuario, dos de ellos azules, y entonces el 2 % serán azules.

7. La respuesta correcta es la (D). Ver explicación para el problema 21 de 7º grado, página 11.

8. La respuesta correcta es la (D), pues al escribir 2009, dos mil nueve veces seguidas, tendremos el número 9 repetido 2009 veces, el 2 también aparecerá 2009 veces y habrá un total de 4018 ceros. El único dígito impar en esa secuencia de números es el 9, que si bien aparece repetido 2009 veces, una de esas veces, la última, no va seguido inmediatamente por un número par. Por lo tanto, el número pedido es $2008 \times 9 = 18072$.

9. La respuesta correcta es la (C). Ver explicación para el problema 22 de 8º grado, página 23.

10. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 12 de 8º grado, página 21.

11. La respuesta correcta es la (E). La secuencia que escribió Leonardo es la siguiente:

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, \ldots, etc.$$

Como el cuarto número es igual a 6 y el sexto es 15, para hallar la respuesta hay que resolver el sistema formado por las ecuaciones $3a+5b=15$ y $a+2b=6$. La solución a este sistema es $a=0$ y $b=3$. El séptimo número de acuerdo a la forma como se construye la secuencia es $5a+8b$, en consecuencia el séptimo número es 24.

12. La respuesta correcta es la (B). Ver explicación para el problema 12 de 7º grado, página 10.

13. La respuesta correcta es la (C). Si el promedio de los cuatro exámenes es 4, entonces la suma de las 4 calificaciones es 16. Si suponemos que María obtuvo 3 exactamente 3 veces, la última puntuación tendría que ser 7, para que la suma de las cuatro puntuaciones sea 16, lo cual no es posible.

14. La respuesta correcta es la (D). Se sabe que $\measuredangle ABI = \measuredangle CBI$ y $\measuredangle ICB = \measuredangle ACI$. Por otro lado, en los triángulos $\triangle AIB$, $\triangle AIC$ y $\triangle BIC$ se tiene

$$\measuredangle AIB + \measuredangle ABI + 34^\circ = 180^\circ,$$

$$\measuredangle AIC + \measuredangle ACI + 34^\circ = 180^\circ,$$

$$\measuredangle BIC + \measuredangle ICB + \measuredangle CBI = 180^\circ,$$

respectivamente. De las expresiones anteriores se obtiene

$$\measuredangle AIB + \measuredangle ACI - \measuredangle BIC + 68^\circ = 180^\circ.$$

Como $\measuredangle AIB + \measuredangle AIC + \measuredangle BIC = 180^\circ$, se puede concluir que $2\measuredangle BIC = 248^\circ$. Así, $\measuredangle BIC = 124^\circ$.

15. La respuesta correcta es la (E). Para $n = 81$ y $n = 121$ la diferencia es exactamente 1, por tanto, para los números que van del 82 al 120, incluyendo a ambos números, la diferencia es menor a 1. Así, hay 39 enteros positivos que cumplen con la condición.

16. La respuesta correcta es la (A). Una forma de escribir nueve números es 8, 4, 1, 5, 10, 2, 6, 3, 9. No se pueden escribir 10 porque el 7 debería ocupar un extremo, al lado del 1, y no hay forma de acomodar los 8 restantes.

17. La respuesta correcta es la (E). De acuerdo a las dos operaciones definidas tenemos la ecuación $15+3+5 = 2x+2+x$. Por lo tanto $x = 7$.

18. La respuesta correcta es la (C). Tomemos como unidad de medida el lado del cuadrado y sean r y R los radios de las circunferencias de menor y mayor radio, respectivamente. La diagonal del cuadrado mide entonces $2R$, y por el teorema de Pitágoras $1^2 + 1^2 = (2R)^2$, de donde $R^2 = 1/2$ y $R = \sqrt{2}/2$. Por otra parte $1 = R + r$, de donde $r = 1 - R = 1 - \sqrt{2}/2$. Por lo tanto

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = 1 + \sqrt{2}.$$

19. La respuesta correcta es la (A). Ver explicación para el problema 17 de 8º grado, página 22.

20. La respuesta correcta es la (E). Como

$$\frac{20009}{20008} = 1 + \frac{1}{20008} < 1 + \frac{1}{10000} = 1{,}0001$$

y

$$\frac{2009}{2008} = 1 + \frac{1}{2008} > 1 + \frac{1}{10000} = 1{,}0001,$$

se tiene

$$\frac{20009}{20008} < 1{,}0001 < \frac{2009}{2008}.$$

21. La respuesta correcta es la (C). Como $8^8 = 2^{24}$, es claro que $b < a$. Por otro lado, $2^2 > 3$ implica que $2^{22} > 3^{11}$. De lo anterior se deduce que $c < b < a$.

22. La respuesta correcta es la (E). Es claro que la mayor superficie del cuadrado que se puede cubrir con el triángulo es igual a la mayor superficie del triángulo que se puede cubrir con el cuadrado. Así, si x es el área del triángulo, se tiene que $0,6 \cdot x = \frac{2}{3} \cdot 36$ cm^2, de donde $x = 40$ cm^2.

23. La respuesta correcta es la (B). Para ver esto observemos que $2009 = 7^2 \times 41$. De esta forma podemos construir un prisma rectangular de lados 7, 7 y 41. Para cubrir con las calcomanías las caras, basta observar que hay dos caras de 7×7 y cuatro caras de 41×7. De esta forma el total de calcomanías utilizadas es 1246 y sobran 763.

24. La respuesta correcta es la (A). Si se suma el número de fichas en cada fila y en cada columna, el resultado debe ser el doble del total de fichas n, y como esa suma debe ser al menos $0+1+2+3+4+5+6+7 = 28$, se tiene que $n \geq 14$. La figura muestra una distribución con 14 fichas.

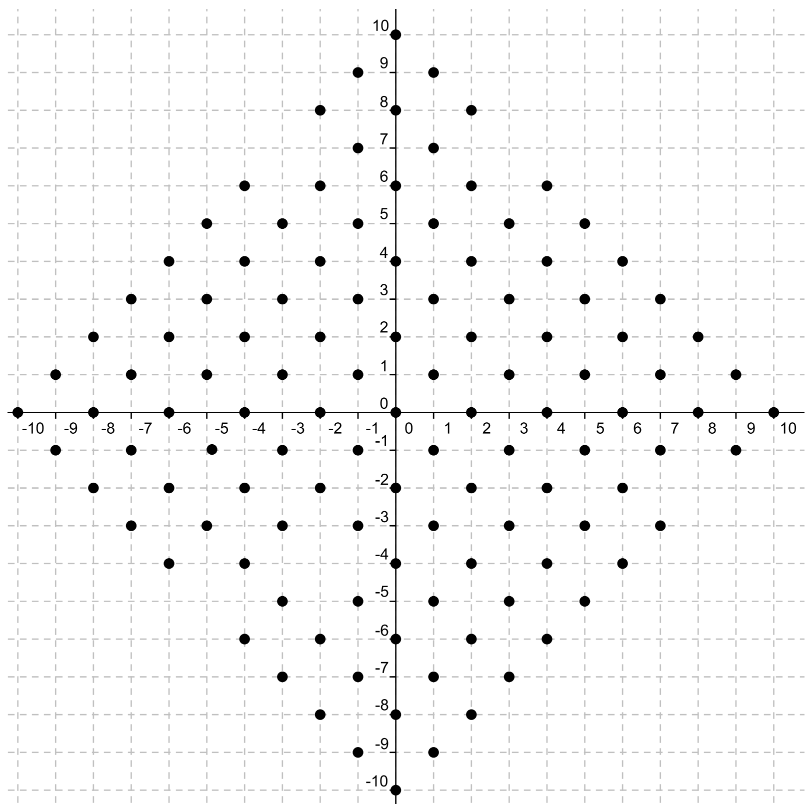
0	0	0	0
0	0	0	1
2	2	1	1
3	2	1	1

25. La respuesta correcta es la (C). Ocho frutas es el mínimo posible. Dos distribuciones pueden ser: NDMBNMDB y NMBNDMBD.

26. La respuesta correcta es la (E), pues el 8 es el menor número que satisface la condición pedida y no aparece entre las alternativas.

27. La respuesta correcta es la (B). De acuerdo a las condiciones del problema, si $d_1 < \cdots < d_m$ son los divisores del número N distintos de 1 y N, entonces $d_m = 45d_1$. Como también $d_m = N/d_1$, entonces $N = d_m d_1 = 45d_1^2$. Pero d_1 sólo puede ser 2 ó 3, por tanto los únicos valores posibles para N son 180 y 405.

28. La respuesta correcta es la (A). Los puntos a los que puede llegar el canguro son los de la forma (a, b), con a y b enteros de la misma paridad tales que $|a| + |b| \leq 10$, los cuales forman la figura siguiente:



es decir una cuadrícula de 11×11 centrada en el origen y girada 45° respecto a los ejes, que por lo tanto contiene 121 puntos.

29. La respuesta correcta es la (A). Sea H el punto de intersección entre los segmentos FG y PQ. Por el teorema de Pitágoras, $FH^2 = 13^2 - 12^2 = 5$ y $HG^2 = 15^2 - 12^2 = 9$. Así $FG = FH + HG = 14$.

30. La respuesta correcta es la (D). Hay 9 primos extraños, a saber 2, 3, 5, 7, 23, 37, 53, 73 y 373.

Capítulo 2

Prueba Regional

2.1. Prueba de 7º y 8º grados

Problema 1
Un triángulo equilátero tiene igual perímetro que un cuadrado. Si el área del cuadrado es 36m^2, ¿cuánto mide el lado del triángulo?

Problema 2
Un barril está lleno de agua. Lo vacías a la mitad y después le añades un litro de agua. Después de hacer esta operación (vaciar la mitad de lo que hay y añadir un litro) cinco veces seguidas, te quedan 3 litros de agua en el barril. ¿Cuántos litros de agua había en el barril inicialmente?

Problema 3
En un gran corral hay 2009 cabras, cada una de las cuales tiene piel oscura o clara. Un pastor compara las alturas de las cabras y encuentra que hay una cabra de piel clara que es más alta que exactamente 8 de las de piel oscura, hay otra cabra de piel clara que es más alta que exactamente 9 de las de piel oscura, otra cabra de piel clara es más alta que exactamente 10 de las de piel oscura, y así sucesivamente, hasta llegar a la última cabra de piel clara, que es más alta que todas las de piel oscura. ¿Cuántas cabras de piel clara hay?

Problema 4
¿Cuántos números de cuatro cifras son múltiplos de nueve y tienen todos sus dígitos impares y diferentes?

Problema 5
Simón escribe una lista de números. El primero es 25, y luego cada número es la suma de los cuadrados de los dígitos del anterior. Por ejemplo, el segundo en la lista es $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$, y el tercero es $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$. ¿Qué número aparece en la posición 2009?

2.1.1. Soluciones

1. Si el área del cuadrado es 36m^2, el lado del cuadrado debe ser 6m y por lo tanto, su perímetro es $6\text{m}\times 4 = 24\text{m}$. Entonces el perímetro del triángulo también es 24m y su lado es $24\text{m}/3 = 8\text{m}$.

2. Solución I (razonamiento retrógrado): Luego de la quinta operación quedan 3 litros de agua en el barril, entonces antes de agregar el litro había 2 litros y antes de vaciar la mitad había 4 litros. Esto se puede representar así: $4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{+1} 3$. Entonces antes de agregar el litro de la cuarta operación había 5 y antes de vaciar la mitad había 10:

$$6 \xrightarrow{\div 2} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{+1} 3$$

Si continuamos de esta manera hacia la izquierda, llegamos a

$$34 \xrightarrow{\div 2} 17 \xrightarrow{+1} 18 \xrightarrow{\div 2} 9 \xrightarrow{+1} 10 \xrightarrow{\div 2} 5 \xrightarrow{+1} 6 \xrightarrow{\div 2} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{\div 2} 2 \xrightarrow{+1} 3$$

Por lo tanto, la respuesta es 34. Esto se puede representar también en forma tabular:

operación	inicio	medio	final
1	34	17	18
2	18	9	10
3	10	5	6
4	6	3	4
5	4	2	3

Aquí se comienza por llenar la última fila (operación 5), de derecha a izquierda, con los valores 3 (final), 2 (medio) y 4 (inicio). El valor inicial de una operación es el valor final de la operación anterior, así se llena la fila correspondiente a la cuarta operación, de derecha a izquierda, con los valores 4 (final), 3 (medio) y 6 (inicio). Lo mismo se hace con las demás filas hasta obtener como respuesta 34.

Solución II (algebraica): Si se tienen x litros de agua en el barril, luego de hacer una operación quedan $x/2+1$ litros. Por lo tanto, luego de 5 operaciones quedan

$$((((x/2+1)/2+1)/2+1)/2+1)/2+1 = 3.$$

Restando 1 a ambos miembros y multiplicando por 2 resulta

$$(((x/2+1)/2+1)/2+1)/2+1 = 4,$$

y repitiendo cuatro veces esta operación se obtiene

$$\begin{aligned} ((x/2+1)/2+1)/2+1 &= 6, \\ (x/2+1)/2+1 &= 10, \\ x/2+1 &= 18, \\ x &= 34. \end{aligned}$$

3. Si se ponen en orden creciente de alturas, las primeras 8 cabras deben ser de piel oscura, y luego deben irse alternando piel clara y piel oscura: OOOOOOOOCOCOC...OC. Luego de las primeras 7 O's, aparecen 1001 grupos OC, luego hay 1001 cabras de piel clara.

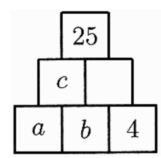
4. Los conjuntos posibles con cuatro dígitos impares diferentes son $\{1,3,5,7\}$, $\{1,3,5,9\}$, $\{1,3,7,9\}$, $\{1,5,7,9\}$ y $\{3,5,7,9\}$. Pero para que un número sea múltiplo de 9 la suma de sus cifras también debe serlo, lo cual sólo lo cumple $\{1,3,5,9\}$. Como estos números se pueden ordenar de $4\times3\times2\times1 = 24$ maneras, la respuesta es 24.

5. Los primeros números de la lista son 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, 145,... El 89 aparece en cuarto lugar y también en la posición 12, por lo tanto, la sucesión es periódica de período 8: los números del cuarto al undécimo (89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58) se repiten a partir de la posición 12, y luego a partir de las posiciones 20, 28, 36,... Como en las posiciones divisibles entre 8 siempre va un 4, en la posición 2008 va un 4 y en la 2009 va el 16.

2.2. Prueba de 9º grado

Problema 1
En cierta isla, los habitantes son de dos tipos: los *caballeros*, que siempre dicen la verdad, y los *pícaros*, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidos tres nativos de la isla llamados Apu, Bop y Cip. Apu dice "Los tres somos pícaros". Bop dice "Exactamente uno de nosotros es caballero". Cip no dice nada. ¿Qué es cada uno de ellos?

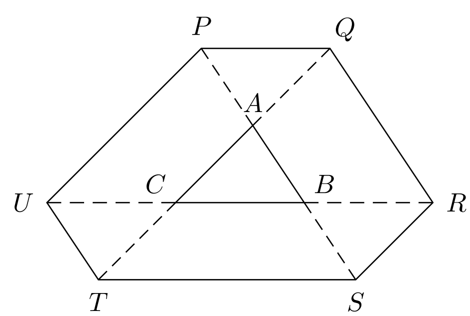
Problema 2
La suma de los números de dos cuadrados consecutivos (horizontalmente) es igual al número del cuadrado que está arriba de ellos, por ejemplo, $a + b = c$. Si la suma de los números en la fila inferior es 17, ¿cuál es el valor de a?



Problema 3
Tengo un número $abcd$ de cuatro dígitos. Invierto el orden de los dígitos y tengo el número $dcba$. Al mayor le resto el menor y obtengo un número de cuatro dígitos donde tres de ellos son 1, 7 y 9. ¿Cuál es el dígito que falta?

Problema 4
Ana y Bruno juegan del siguiente modo: Ana tiene inicialmente 7 barajitas, de las cuales debe descartar al menos una y a lo sumo la mitad, y pasarle las que queden a Bruno. Bruno hace lo mismo, es decir, descarta al menos una y no más de la mitad de las barajitas que recibió, y le pasa las que queden a Ana. Continúan jugando alternadamente de la misma manera hasta que uno de los dos reciba una sola barajita, en cuyo caso no puede continuar el juego y pierde. Pruebe que Bruno puede ganar siempre este juego, haga lo que haga Ana.

Problema 5
Los lados del triángulo ABC se prolongan por ambos lados hasta los puntos P, Q, R, S, T y U, de tal manera que $\overline{PA} = \overline{AB} = \overline{BS}$, $\overline{TC} = \overline{CA} = \overline{AQ}$ y $\overline{UC} = \overline{CB} = \overline{BR}$. Si el área de ABC es 1 cm^2, ¿cuál es el área del hexágono $PQRSTU$?



2.2.1. Soluciones

1. Solución I: Apu y Cip son pícaros y Bop es caballero. En efecto, Apu no puede ser caballero pues entonces su afirmación sería falsa. Por lo tanto, Apu es pícaro y es falso que los tres sean pícaros, es decir que al menos uno de los otros dos es caballero. Si Bop fuese pícaro, entonces Cip debería ser caballero, y habría exactamente un caballero, haciendo cierta la afirmación de Bop (contradicción). Entonces Bop debe ser caballero, y Cip pícaro.

Solución II: Cada uno de los tres puede ser caballero o pícaro, luego hay ocho posibilidades que se muestran en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6	7	8
Apu	p	p	p	p	c	c	c	c
Bop	p	p	c	c	p	p	c	c
Cip	p	c	p	c	p	c	p	c

La posibilidad 1 se descarta pues, si los tres son pícaros, Apu estaría diciendo la verdad y sería caballero. Las posibilidades 5, 6, 7 y 8 se descartan pues, si Apu fuese caballero, no podría afirmar que los tres son pícaros. La posibilidad 2 se descarta pues contiene un solo caballero, y entonces Bop, siendo pícaro, estaría diciendo la verdad. La posibilidad 4 se descarta pues contiene 2 caballeros, y entonces Bop, siendo caballero, estaría mintiendo. Sólo nos queda la posibilidad 3, que es compatible con las afirmaciones de Apu y Bop.

2. Como $a+b+4=17$, tenemos que $c=a+b=17-4=13$. Si llamamos x al valor que debe ir en la casilla en blanco, entonces $c+x=25$, luego $x=25-c=25-13=12$. Ahora, como $b+4=12$, se tiene que $b=8$, y finalmente de $a+b=13$ se obtiene $a=13-8=5$.

3. Si suponemos que $abcd > dcba$, entonces

$$abcd - dcba = 9(111a - 111d + 10b - 10c)$$

Luego, la suma de los dígitos de $abcd - dcba$ debe ser múltiplo de 9. Como $1+7+9=17$, es fácil ver que el único número entre 1 y 9 que sumado con 17 da un múltiplo de 9 es el 1. Por lo tanto, el dígito que falta es el 1.

4. Solución I: Bruno tiene una estrategia ganadora. En efecto, inicialmente Ana puede descartar 1, 2 ó 3 barajitas, pasándole 6, 5 ó 4 a Bruno. Si Bruno recibe 6 descarta 3, si recibe 5 descarta 2 y si recibe 4 descarta 1, pasándole en cualquier caso 3 barajitas a Ana. Ahora Ana sólo puede descartar una y pasarle 2 a Bruno, quien descarta una, le pasa la otra a Ana, y gana.
Solución II: El juego se puede analizar en función del número de barajitas que tenga el jugador a quien le toca jugar.
(a) Si tiene 2, descarta una, le pasa la otra al contrario y gana.
(b) Si tiene 3, sólo puede descartar una y pasarle dos al contrario, quien por (a) gana. Por lo tanto, 3 es una posición perdedora.

(c) Si tiene 4, puede descartar una y pasarle tres al contrario, quien por (b) perderá. Por lo tanto 4 es una posición ganadora.
(d) Si tiene 5, puede descartar dos y pasarle tres al contrario, quien por (b) perderá. Por lo tanto, 5 es una posición ganadora.
(d) Si tiene 6, puede descartar una y pasarle tres al contrario, quien por (b) perderá. Por lo tanto, 6 es una posición ganadora.
(e) Si tiene 7, como Ana en este problema, sólo puede descartar 1, 2 o 3, dejándole al contrario 6, 5 o 4, respectivamente. En cualquiera de estos casos, por (c), (d) y (e), el contrario puede ganar. Por lo tanto, Bruno tiene una estrategia ganadora.

5. Cada uno de los triángulos APQ, BRS y CST son congruentes con el ABC, por lo tanto, tienen área 1 cm^2. Además, ATS tiene lados dobles y área cuádruple que el ABC, por lo tanto, el trapecio $BCTS$ tiene área 3 cm^2 y lo mismo ocurre con los otros dos trapecios. Sumando se obtiene como respuesta 13 cm^2.

2.3. Prueba de 1º y 2º de diversificado

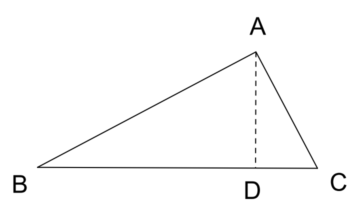
Problema 1
Un arqueólogo estudia una antigua civilización que usaba un sistema de numeración posicional similar al nuestro, pero de base 5. Los símbolos para los dígitos eran $\triangle$, $\Diamond$, $\Box$, $\bigstar$ y $\triangledown$, que corresponden en algún orden a nuestros 0, 1, 2, 3 y 4. Por ejemplo, el número $\Diamond\triangledown\bigstar\Box$ debe interpretarse como $\Diamond\cdot 5^3 + \triangledown\cdot 5^2 + \bigstar\cdot 5 + \Box$, el problema es que no se conoce la correspondencia exacta entre símbolos y dígitos. Sin embargo, el arqueólogo descubrió que los tres números $\bigstar\triangledown\Diamond\Box$, $\bigstar\triangledown\Diamond\triangle$ y $\bigstar\triangledown\bigstar\triangledown$ son consecutivos y están ordenados de menor a mayor.
Halle el valor de cada símbolo y el de los tres números consecutivos.

Problema 2
Considere todos los números posibles de 8 cifras diferentes no nulas (como, por ejemplo, 73451962).
(a) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 5?
(b) ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 9?

Problema 3
Si a y b son números distintos tales que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a+10b}{b+10a} = 2$, ¿cuánto vale $\dfrac{a}{b}$?

Problema 4
En una reunión de matemáticos, uno de ellos dijo: “Somos 9 menos que el doble del producto de los dos dígitos de nuestro número total.” ¿Cuántos matemáticos había en la reunión?

Problema 5
Un triángulo ABC es rectángulo en A con $AB/AC = 3/2$. Si D es el pie de la altura trazada desde A y se sabe que $BD - DC = 5$, calcule el área del triángulo ABC.



2.3.1. Soluciones

1. Como $\bigstar\triangledown\Diamond\Box$, $\bigstar\triangledown\Diamond\triangle$ y $\bigstar\triangledown\bigstar\triangledown$ son consecutivos, debe ser $\triangle = 4$ y $\triangledown = 0$. Además a $\Box$ le sigue $\triangle$, por lo tanto $\Box = 3$. Sólo queda asignar 1 y 2 a $\Diamond$ y $\bigstar$, pero como a $\Diamond$ le sigue $\bigstar$ debe ser $\Diamond = 1$ y $\bigstar = 2$. El primero de los tres números dados es entonces

$$\bigstar \cdot 5^3 + \triangledown \cdot 5^2 + \Diamond \cdot 5 + \Box = 2 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 1 \cdot 5 + 3 = 258$$

y los otros dos son 259 y 260.

2. (a) Deben terminar en 5, y las primeras siete cifras pueden ser cualquier arreglo de 7 elementos tomados de $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, de los cuales hay $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40320$.
(b) Como $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$, las únicas 8 cifras diferentes no nulas cuya suma es múltiplo de 9 son las del 1 al 8. Por lo tanto, la respuesta es $8! = 40320$.

3. Solución I: De la expresión dada se deduce que

$$a(b + 10a) + (a + 10b)b = 2b(b + 10a),$$

y luego de quitar paréntesis y simplificar queda $10a^2 - 18ab + 8b^2 = 0$, que se puede factorizar como $2(a - b)(5a - 4b) = 0$. Como $a \neq b$, debe ser $5a - 4b = 0$ y por lo tanto $a/b = 4/5$.

Solución II: La expresión dada se puede escribir como

$$\frac{a}{b} + \frac{\frac{a}{b} + 10}{1 + 10\frac{a}{b}} = 2.$$

Poniendo $x = a/b$ queda

$$x + \frac{x + 10}{1 + 10x} = 2,$$

y multiplicando por $1 + 10x$ se obtiene $x(1 + 10x) + x + 10 = 2(1 + 10x)$, que se reduce a $10x^2 - 18x + 8 = 0$. Esta ecuación de segundo grado tiene raíces 1 y 4/5. Descartamos 1 porque $a \neq b$ implica $x = a/b \neq 1$, y nos queda $a/b = x = 4/5$.

4. Si eran $n = 10a + b$ matemáticos, con $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$, la condición del problema se traduce en $10a + b = 2ab - 9$. Es claro que $b = 2ab - 10a - 9$ debe ser impar. Además como $2(b - 5)a = b + 9 > 0$ debe ser $b > 5$, y b sólo puede ser 7 ó 9. Pero $b = 9$ se descarta pues quedaría $8a = 18$, que no tiene solución. Entonces $b = 7$, de donde $4a = 7 + 9 = 16$ y $a = 4$. Es decir que el número de matemáticos era 47.

5. Los triángulos BAD y ACD son semejantes, y como $AB/AC = 3/2$ se sigue que $BD/AD = AD/DC = 3/2$, y entonces

$$5 = BD - DC = \frac{3}{2}AD - \frac{2}{3}AD = \frac{5}{6}AD,$$

de donde $AD = 6$, $BD = (3/2)AD = 9$, $DC = (2/3)AD = 4$, $BC = 9 + 4 = 13$ y finalmente el área pedida es $13 \cdot 6/2 = 39$.

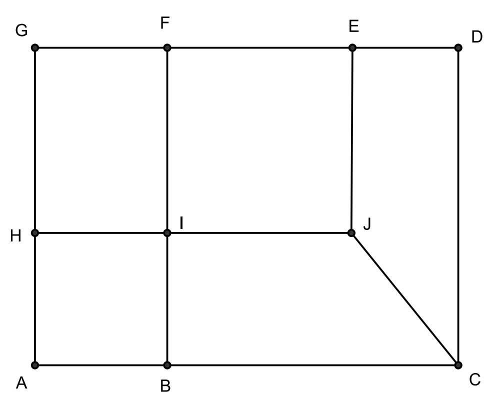
Capítulo 3

Prueba Final

3.1. Prueba de 7º y 8º grados

Problema 1.
Un número es *capicúa* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo 4, 77, 383 y 1661 son capicúas. ¿Cuántos números, desde el 1 hasta el 2009, son capicúas?

Problema 2.
La figura muestra un rectángulo dividido en cinco partes. Se sabe que el área del cuadrado $ABIH$ es 25 cm^2, el área del cuadrado $FIJE$ es 49 cm^2 y el área del trapecio $BCJI$ es 45 cm^2. ¿Cuál es el área del trapecio $DEJC$?



Problema 3.
Los números desde el l hasta el 2009 se escriben consecutivamente en la pizarra. En una primera pasada se borran el primer número escrito, el tercero, el quinto y así sucesivamente hasta borrar el 2009. En una segunda pasada se aplica el mismo procedimiento a los números que quedaron, borrando el primero de

ellos, el tercero, el quinto y así sucesivamente. Esto se repite mientras queden números en la pizarra. ¿En qué pasada se elimina el 1728? ¿Cuál es el último número borrado y en qué pasada se elimina?

Problema 4.
Ana vende galletas, que vienen en cajas pequeñas de 5 unidades y en cajas grandes de 12 unidades. Si, por ejemplo, un cliente quiere 39 galletas, Ana puede despachar el pedido exactamente con tres cajas pequeñas y dos grandes, ya que $3 \times 5 + 2 \times 12 = 39$. Pero hay pedidos que no se pueden despachar exactamente, por ejemplo, cuando un cliente quiere 7, 16 ó 23 galletas. ¿Cuál es el pedido más grande que no se puede despachar exactamente?
Nota: Se supone que Ana tiene o puede pedir a la fábrica todas las galletas que le hagan falta.

3.1.1. Soluciones

1. Hay 9 capicúas de una cifra (1,2,3,...,9) y 9 de dos cifras (11,22,33,...,99). Hay 90 de tres cifras, pues como primera cifra se puede escoger cualquier dígito del 1 al 9 y como segunda cifra cualquier dígito. Los de 4 cifras (hasta el 2009) son 1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991 y 2002. En total, $9 + 9 + 90 + 11 = 119$.

2. De las áreas de los cuadrados se sigue que $BI = 5$ cm y $IJ = 7$ cm. Si $x = BC$ entonces el área del trapecio $BCJI$ es

$$[BCJI] = \frac{x+7}{2}5 = 45 \text{ cm}^2,$$

de donde $x = 11$ cm. Entonces

$$AB + BC = 5 + 11 = 16 = GF + FE + ED = 5 + 7 + ED,$$

de donde $ED = 16 - 12 = 4$ cm, y como $EJ = 7$ cm y $CD = 5 + 7 = 12$ cm, $[DEJC] = ((12 + 7)/2)4 = 38 \text{ cm}^2$. Alternativamente, como

$$[ACDG] = (AB + BC)(AH + HG) = (16 \text{ cm})(12 \text{ cm}) = 192 \text{ cm}^2,$$

se tiene que

$$\begin{aligned}[DEJC] &= [ACDG] - [ABIH] - [FIJE] - [BCJI] - [FGHI] \\ &= 192 - 25 - 49 - 45 - 35 = 38 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

3. En la primera pasada se borran todos los impares, quedando los pares del 2 al 2008. La segunda pasada deja todos los múltiplos de 4 desde el 4 hasta el 2008. Así sucesivamente van quedando los múltiplos de 8, luego los de 16, 32, 64, 128, 256, 512 y 1024. Como $1728 = 64 \cdot 27$, sobrevive a la sexta pasada y es borrado en la séptima. Como el único múltiplo de 1024 (no mayor que 2009) es el mismo 1024, éste es el último número borrado y se elimina en la pasada número 11.

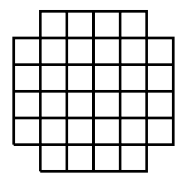
4. Usando solamente cajas pequeñas Ana puede despachar 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, ..., es decir, cualquier número terminado en 0 ó en 5.
Con una caja de 12 y otras de 5 puede despachar 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, ..., es decir, cualquier número terminado en 2 ó en 7 a partir del 12.
Con dos cajas de 12 y otras de 5 puede despachar 24, 29, 34, 39, 44,..., es decir, cualquier número terminado en 4 ó en 9 a partir del 24.
Con tres cajas de 12 y otras de 5 puede despachar 36, 41, 46, 51,..., es decir, cualquier número terminado en 6 ó en 1 a partir del 36.
Con cuatro cajas de 12 y otras de 5 puede despachar 48, 53, 58, 63, 68, 73,..., es decir, cualquier número terminado en 8 ó en 3 a partir del 48.
Examinando estas listas se ve que el 43 no se puede despachar exactamente, pues habría que usar a lo sumo 3 cajas grandes y el 43 no se encuentra en

ninguna de las cuatro primeras listas. Como el 44, 45, 46 y 47 se encuentran en las listas, así como cualquier otro número a partir del 48, se concluye que la respuesta es 43.
La misma idea puede expresarse más elegantemente observando que cualquier $n > 0$ se puede escribir como $n = 5k + r$, con $0 \leq r \leq 4$. Como $5k+1 = 5(k-7)+36$, $5k+2 = 5(k-2)+12$, $5k+3 = 5(k-9)+48$ y $5k+4 = 5(k-4)+24$, resulta que si $k \geq 9$ (o sea $n \geq 45$) el pedido se puede despachar exactamente. Como también $44 = 5 \cdot 4 + 12 \cdot 2$ se puede despachar, el mayor que no se puede despachar exactamente es 43. En efecto, para despachar 43 habría que usar 1, 2 ó 3 cajas grandes, pero ni $43 - 12 = 31$, ni $43 - 24 = 19$, ni $43 - 36 = 7$ son múltiplos de 5, por lo tanto, no es posible.

3.2. Prueba de 9º grado

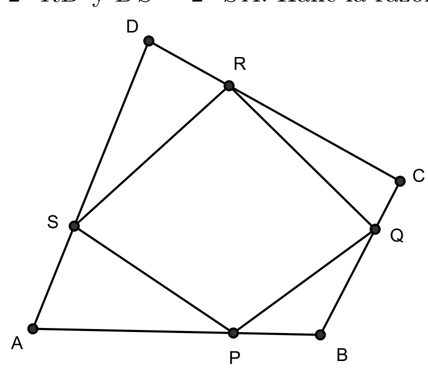
Problema 1.
Marina compra boletos para ella y su hermana Andrea, que es cinco años menor que Marina, para el concierto de uno de sus cantantes favoritos. Cada boleto tiene impreso un número de tres dígitos. El día del concierto, Marina observa que los números de los boletos son consecutivos, y que además la suma de los seis dígitos es precisamente 27, su edad actual. Cuando se lo comenta a Andrea, ésta trata de deducir los números de los boletos sin éxito, por lo que le pide a Marina un dato adicional. Entonces Marina le dice: "La suma de los números de uno de los boletos es tu edad" y, con esa nueva información, Andrea logra deducir correctamente el número de cada boleto. ¿Cuáles eran esos números?

Problema 2.
Ana tiene seis monedas idénticas y desea poner cada una de ellas en una casilla del tablero de la figura, de tal manera que cada fila contenga exactamente una moneda y cada columna contenga exactamente una moneda. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?



Problema 3.
Halle dos números del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ cuyo producto sea igual a la suma de los demás números del conjunto.

Problema 4
En el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que los puntos P, Q, R y S se encuentran en los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente, de modo que $AP = 2 \cdot PB$, $BQ = 2 \cdot QC$, $CR = 2 \cdot RD$ y $DS = 2 \cdot SA$. Halle la razón $[PQRS]/[ABCD]$.



3.2.1. Soluciones

1. Supongamos que el menor de los dos números se escriba como abc (es decir, que el número sea $100a + 10b + c$). Entonces se pueden presentar tres casos:

1. Si $c < 9$ entonces el número del otro boleto tendría dígitos a, b y $c+1$ y la suma de los seis dígitos de ambos boletos sería $a+b+c+a+b+(c+1) = 2(a+b+c)+1 = 27$, de donde $a+b+c = 13$ y $a+b+(c+1) = 14$, que no corresponden a la edad de Andrea (que es 22).

2. Si $c = 9$ y $b < 9$ entonces el número del otro boleto tendría dígitos a, $b+1$ y 0 y la suma de los seis dígitos de ambos boletos sería $a + b + 9 + a + (b + 1) + 0 = 2(a + b) + 10$, lo cual es imposible pues éste es un número par que no puede ser igual a 27.

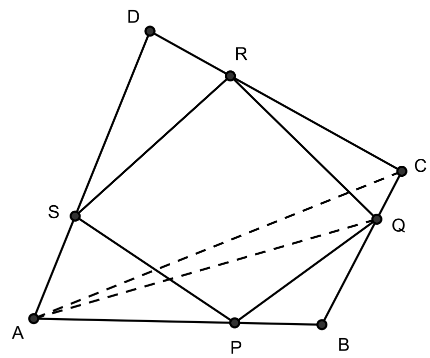
3. Si $c = b = 9$ entonces el número del otro boleto tendría dígitos $a+1$, 0 y 0 y la suma de los seis dígitos de ambos boletos sería $a+9+9+(a+1)+0+0 = 2a+19$, que es igual a 27 si $a = 4$. La suma de los dígitos de 499 es 22 que es justamente la edad de Andrea, por lo tanto, esta es la única solución.

Conclusión: los números de los boletos eran 499 y 500.

2. Se puede comenzar por poner una moneda en cualquiera de las 4 casillas de la primera fila. Como no se pueden repetir columnas, en la sexta fila quedarán entonces 3 casillas disponibles donde colocar una segunda moneda. Quedan ahora cuatro columnas libres: la primera, la sexta y dos intermedias. Luego, en cada fila de la segunda a la cuarta hay que poner una moneda de modo que quede una en cada una de las cuatro columnas libres, lo cual se puede hacer de $4! = 24$ maneras (ya que para la segunda fila se puede escoger una de 4 columnas, para la tercera fila se puede escoger una de las 3 columnas restantes, para la cuarta fila una de las 2 columnas restantes, y para la quinta fila se escoge la única columna que queda disponible). La respuesta es entonces $4 \cdot 3 \cdot 4! = 12 \cdot 24 = 288$.

3. La suma de todos los números en el conjunto es $(1+17)17/2 = 153$. Debemos hallar enteros x e y, con $1 \le x < y \le 17$, tales que $xy = 153 - x - y$. Esta ecuación se puede reescribir como $xy + x + y + 1 = 154$, o bien $(x + 1)(y + 1) = 2 \cdot 7 \cdot 11$, que se satisface para $x = 10$, $y = 13$.

4. Como $PB = AB/3$ y los triángulos PBQ y ABQ tienen igual altura desde Q, entre sus áreas se tiene la relación $[PBQ] = [ABQ]/3$. Análogamente, como $BQ = (2/3)BC$, se tiene que $[ABQ] = (2/3)[ABC]$. Por lo tanto $[PBQ] = (2/9)[ABC]$.



Análogamente se prueba que $[QCR] = (2/9)[BCD]$, $[RDS] = (2/9)[CDA]$ y $[SAP] = (2/9)[DAB]$. Sumando resulta que

$$\begin{aligned} [PBQ] + [QCR] + [RDS] + [SAP] &= \frac{2}{9}\big([ABC] + [BCD] + [CDA] + [DAB]\big) \\ &= \frac{4}{9}[ABCD], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} [PQRS] &= [ABCD] - \big([PBQ] + [QCR] + [RDS] + [SAP]\big) \\ &= (1 - \frac{4}{9})[ABCD] = \frac{5}{9}[ABCD], \end{aligned}$$

de donde se sigue que

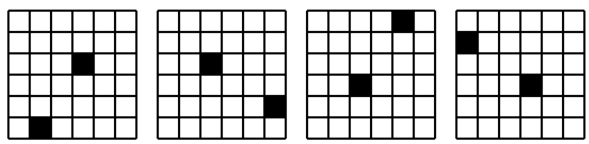
$$\frac{[PQRS]}{[ABCD]} = \frac{5}{9}.$$

3.3. Prueba de 1º y 2º de diversificado

Problema 1
Halle todas las cuaternas de enteros positivos (a, k, m, n) tales que $a^k = a^m + a^n$.

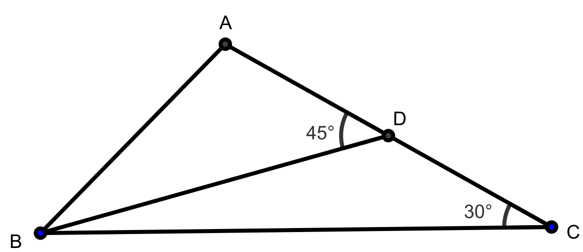
Problema 2.
Una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisface la relación $(n+2)a_{n+1} = na_n$ para todo entero positivo n. Si $a_1 = 1005$, ¿cuál es el valor de a_{2009}?

Problema 3
Juana tiene un tablero blanco de 6×6 y desea pintarle dos casillas de negro. Dos coloraciones que difieran en una rotación se consideran equivalentes, por ejemplo, las cuatro coloraciones que se ilustran en la figura son todas equivalentes:



¿De cuántas maneras *no equivalentes* puede Juana pintar su tablero?

Problema 4.
BD es mediana del triángulo ABC. El ángulo ACB mide 30° y el ángulo ADB mide 45°. ¿Cuánto mide el ángulo ABD?



3.3.1. Soluciones

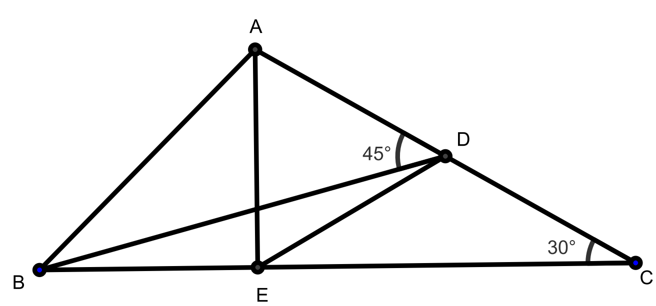
1. Como $1^k = 1 \neq 2 = 1^m + 1^n$, debe ser $a \geq 2$. Si $m > n$ y $a^k = a^m + a^n$, entonces $a^{k-n} = a^{m-n} + 1$ y a dividiría a $a^{k-n} - a^{m-n} = 1$, absurdo pues $a \geq 2$. Análogamente no puede ser $n > m$. Si $m = n$ entonces $a^k = 2a^n$, es decir $a^{k-n} = 2$, que se cumple si y sólo si $a = 2$ y $k - n = 1$. Por lo tanto, las cuaternas buscadas son las de la forma $(2, n+1, n, n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. De la condición $(n+2)a_{n+1} = na_n$ se obtiene $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2}a_n$, por lo tanto

$$\begin{aligned} a_{2009} &= \frac{2008}{2010}a_{2008} = \frac{2008}{2010}\cdot\frac{2007}{2009}a_{2007} = \frac{2008\cdot 2007\cdot 2006}{2010\cdot 2009\cdot 2008}a_{2006} = \cdots \\ &= \frac{2008\cdot 2007\cdot 2006\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{2010\cdot 2009\cdot 2008\cdots 5\cdot 4\cdot 3}a_1 = \frac{2\cdot 1}{2010\cdot 2009}1005 = \frac{1}{2009}. \end{aligned}$$

3. El tablero tiene 36 casillas, y las dos que se van a pintar se pueden escoger de $\binom{36}{2} = 630$ maneras. La mayoría de las 630 coloraciones posibles se pueden poner en grupos de a cuatro equivalentes (que se obtienen rotando una de ellas 90°, 180° y 270°), excepto las que tienen las dos casillas simétricas respecto al centro del tablero, que sólo son equivalentes a otra más (pues la rotación de 180° las deja invariantes, y las de 90° y 270° dan lo mismo). Como hay 18 pares de casilas simétricas respecto al centro del tablero, el número de coloraciones no equivalentes es $18/2 + (630 - 18)/4 = 9 + 153 = 162$.

4. Sea E el pie de la altura desde A. Como AEC es un triángulo rectángulo con $\measuredangle ACE = 30°$, es claro que $AE = AC/2 = AD$, y como $\measuredangle EAD = 60°$ resulta que EAD es equilátero, y $\measuredangle BDE = 60° - 45° = 15°$. Como también $\measuredangle DBC = 45° - 30° = 15°$, resulta que BED es isósceles y $BE = DE = AE$, de donde $\measuredangle ABE = 45°$ y $\measuredangle ABD = 45° - 15° = 30°$.



Estudiantes premiados en la Final Nacional de la Olimpiada Juvenil de Matemáticas 2009

Séptimo Grado

Medallas de Oro

Miguel Ignacio Alberto Vilchez	Dtto. Capital
Julio Espinoza	Edo. Carabobo
Luis Roberto Réquiz Perera	Dtto. Capital

Medallas de Plata

Luis Alejandro Medina Briceño	Edo. Zulia
Luis J. Rodríguez	Edo. Carabobo
Pedro Romero	Dtto. Capital
Eduardo Andrés Chacín	Edo. Zulia

Medallas de Bronce

Juan Diego Ocando Ruiz	Edo. Trujillo
Rosa Tanzi	Edo. Bolívar
Rodrigo Delgado Allega	Dtto. Capital
Rodolfo José Márquez	Edo. Lara
Mathías San Miguel López	Edo. Sucre
Rubmary Rojas	Edo. Lara
Víctor Estévez Fernandez	Edo. Nueva Esparta
Alí Alejandro Reyes Romero	Edo. Zulia

Menciones de Honor

Margarita Salazar	Edo. Sucre
Gianpaolo José Cuticchia Chile	Edo. Aragua

Octavo Grado

Medallas de Oro

Diego Leonardo Peña	Edo. Miranda
Miguel Ángel Linares	Edo. Lara
Sergio Villaroel	Edo. Sucre

Medallas de Plata

Jesús Eliseo Reyna Reball	Edo. Sucre
Mariana Saavedra Mulino	Edo. Carabobo
Ezequiel José Quijada Marval	Edo. Anzoátegui
Julio Marcos	Edo. Bolívar
Juan Diego Ocando Ruiz	Edo. Trujillo

Medallas de Bronce

Elizabeth Acosta Silva	Dtto. Capital
Wolfang A. Torres	Edo. Zulia
Jeremy Rojas	Edo. Zulia
Sebastián Hernández	Dtto. Capital
Natasha Delingen	Edo. Carabobo
Tomás Andrés Salazar	Dtto. Capital
Rafael Alejandro Villarroel	Dtto. Capital
Andrés Eloy Rodríguez	Edo. Zulia

Menciones de Honor

Viktor Othail Durán	Edo. Sucre
Yanireth Bervins Fonseca	Edo. Lara

Noveno Grado

Medallas de Oro

Edenys Hernao Hernández	Edo. Zulia

Medallas de Plata

Carlos Lamas	Edo. Lara
Darío Tambone	Dtto. Capital
David Eduardo Villalobos	Edo. Zulia

Medallas de Bronce

María Alejandra Velutini	Dtto. Capital
Miguelángel Dahdah	Dtto. Capital
Tomás Andrés Rodríguez	Edo. Nueva Esparta

Menciones de Honor

Joan Manuel Cedeño	Edo. Carabobo
Xavier Hurtado	Edo. Falcón
Paola Moschella	Dtto. Capital
Marian Flores	Edo. Aragua
Alejandro Tomás Miyares	Edo. Zulia
Carlos Alberto Esis	Edo. Miranda

1er Año Ciclo Diversificado

Medallas de Oro

Emery Dunia	Edo. Carabobo

Medallas de Plata

Daniela Eugenia Blanco	Dtto. Capital
Mauricio Marcano	Edo. Nueva Esparta

Medallas de Bronce

Freddy Sánchez	Edo. Zulia
Silvia Irene Meza	Edo. Zulia

2º Año Ciclo Diversificado

Medallas de Oro

Carmela Acevedo	Dtto. Capital
David Urdaneta	Edo. Zulia

Medallas de Plata

Angelo Crincoli	Edo. Bolívar

Medallas de Bronce

Giovanni Parra	Edo. Zulia
Alejandro Flores	Edo. Nueva Esparta

Menciones de Honor

Ricardo Capelle	Edo. Carabobo

Premios Especiales

Diego Peña Colaiocco
Premio Mejor Prueba de la Fundación Empresas Polar.

Carmela Acevedo
Premio a la respuesta más creativa. UNEXPO.

Mauricio Marcano
Premio a la mejor prueba del estado Nueva Esparta.
Gobernación del Estado Nueva Esparta.

Olimpiada Juvenil de Matemáticas

Comité Organizador Nacional

Rafael Sánchez Lamoneda (Presidente)
Saturnino Fermín Reyes (Coordinador Administrativo)
José Heber Nieto Said (Coordinador Académico)
Henry Martínez León (Coordinador de Entrenamientos)
Laura Vielma Herrero (Calendario Matemático)
Eduardo Sarabia
Silvina María de Jesús

Coordinadores Regionales Año 2009

Prof. Lisandro Alvarado (Altos Mirandinos)
Prof. María de Mejias (Anzoátegui Norte)
Prof. Nahir Sotillo (Anaco)
Prof. Nancy de Martínez (El Tigre)
Prof. Rafael Antonio Valdez Tovar (Apure)
Prof. Vilma Escalona (Aragua)
Prof. Orlando Mendoza (Cagua)
Prof. Jorge W. Salazar (Carabobo)
Prof. Sonia Chacón (Cojedes)
Prof. Cenaida Figuera (Delta Amacuro)
Prof. Dibeth Castro (Falcón)
Prof. Carlos Lira (Guárico)
Prof. Víctor Carruci (Lara)
Prof. José Toloza (Mérida)
Prof. Daulis Josefina Nuñez (Monagas)
Prof. Emilia Peña (Nueva Esparta)
Prof. María Martínez G. (Portuguesa)
Prof. Nancy Gómez (Puerto Ordaz)
Prof. Luisa López (Sucre)
Prof. Jorge Lozada (Táchira)
Prof. Ramón Blanco (Trujillo)
Prof. Nancy Candiales (Yaracuy)
Prof. José Heber Nieto (Zulia)